

文章编号:1673-9469(2008)01-0104-04

利用 RKDG 有限元方法追踪运动界面

石国红¹, 冀铁果¹, 陈荣三²

(1.河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056021;2.上海大学 数学系,上海 200444)

摘要:本文首先介绍了用于运动界面追踪的 Level Set 方法,并简要分析了其优缺点。与其它的界面追踪方法相比,Level Set 方法较灵活,无须进行复杂繁琐的界面重构,编程简单,所需要的计算量和存储量不大。然后将 RKDG 有限元方法推广到 Level Set 方程的求解,对二维流体中常见的常数流场、旋转流场和剪切流场做了追踪模拟,并与其它几种运动界面追踪方法做了比较。数值实验表明,本文的方法可以比较准确地捕捉运动界面,得到了分辨率较高的计算结果。

关键词: RKDG 有限元方法; Level Set 方法; 运动界面

中图分类号: O242.21

文献标识码: A

RKDG finite element method for tracing of moving interface

SHI Guo-hong¹, JI Tie-guo¹, CHEN Rong-san²

(1. College of Science, Hebei University of Engineering, Handan of Hebei province 056021, China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: Level Set method including its advantages and disadvantages was first introduced to trace moving interface. Compared with other methods for tracing of moving interface, Level Set method is more flexible, without using complicated reconstruction technique of interface, so it can be easily programmed. Level Set equation was solved by using RKDG (Runge - Kutta Discontinuous Galerkin) finite element method. RKDG method was used to trace the two dimensional constant flow, rotating flow and shear flow, the method proposed was compared with the other methods for tracing of moving interface. The result shows that not only RKDG method can capture the moving interface accurately but also obtained high resolution ratio computational results.

Key words: RKDG finite element method; Level Set method; moving interface

间断有限元方法(discontinuous FEM)最早由 Reed 和 Hill 提出用于求解中子输运方程。 Cockburn 和 Chi - Wang Shu^[1]构造 $(k + 1)$ 阶的 RKDG (Runge - Kutta discontinuous Galerkin)有限元方法求解一维标量守恒律方程,随后将该方法推广到多维以及方程组^[2-3]。RKDG 有限元方法具有灵活处理间断的优点和易于处理复杂的区域边界和边值问题的能力。运动界面的追踪有很多方法,如格子类方法、VOF 方法^[4]、Level Set 方法^[5]和波前追踪方法等。Level Set 方法用等值面函数 $\Phi(x, t)$ 代替 VOF 方法中的流体体积函数,让 $\Phi(x, t)$ 以适当的速度运动,并认为零等值面就是物质界面。

在任意时刻,只要知道了 $\Phi(x, t)$ 和其零等值面,就知道了此时的运动界面。Level Set 方法相对于格子类方法、VOF 方法和波前追踪方法有很多优点。首先该方法不需要显式地追踪物质界面,从而比较容易处理复杂的物质界面,以及拓扑结构发生变化的问题;其次很容易通过 Level Set 函数求出运动界面的法向、曲率等几何性质,而且方法编程简单,所需计算量和存储量不大。本文用 Level Set 方法追踪运动界面,Level Set 方程采用二阶精度的 RKDG 有限元方法进行离散。对二维流体中常见的常数流场、旋转流场和剪切流场做了追踪模拟,得到了分辨率较高的计算结果。

收稿日期:2007-05-24

作者简介:石国红(1981-),女,河北邢台人,助教,硕士生,从事代数和计算流体力学方面的研究。

1 Level Set 方程

追踪运动界面的 Level Set 方程为

$$\Phi_t(x, y, t) + u(x, y)\Phi_x(x, y, t) + v(x, y)\Phi_y(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

这里 u, v 分别表示 x 和 y 方向上的速度。

2 Level Set 方程的离散

对于 Level Set 方程(1),采用文献[3]中的方法对方程组进行空间离散。设 Γ_h 为区间 Ω 的一个四边形剖分,单元 $K \in \Gamma_h, V(K)$ 是 K 上的局部有限元空间,一般我们取它为 m 次多项式($m \geq 0$)集合。定义有限元空间

$$V_h = \{v_h \in L^\infty(\Omega) : v_h|_K \in V(K), \forall K \in \Gamma_h\}$$

用 $\Phi_h(x, y, t) \in V_h$ 代替(1)中的 $\Phi(x, y, t)$, (1)两端同乘以 $v_h \in V_h$, 并在 $K = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ 上积分得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Phi_h(x, y, t) v_h(x, y) dx dy + \\ & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Phi_{hx}(x, y, t) u(x, y) v_h(x, y) dx dy + \\ & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Phi_{hy}(x, y, t) v(x, y) v_h(x, y) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

分部积分得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Phi_h(x, y, t) v_h(x, y) dx dy - \\ & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Phi_h(x, y, t) \frac{\partial [u(x, y) v_h(x, y)]}{\partial x} dx dy - \\ & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Phi_h(x, y, t) \frac{\partial [v(x, y) v_h(x, y)]}{\partial y} dx dy + \\ & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [\Phi_h(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t) u(x_{i+\frac{1}{2}}, y) v_h(x_{i+\frac{1}{2}}, y) - \\ & \Phi_h(x_{i-\frac{1}{2}}, y, t) u(x_{i-\frac{1}{2}}, y) v_h(x_{i-\frac{1}{2}}, y)] dy + \\ & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [\Phi_h(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t) v(x, y_{j+\frac{1}{2}}) v_h(x, y_{j+\frac{1}{2}}) - \\ & \Phi_h(x, y_{j-\frac{1}{2}}, t) v(x, y_{j-\frac{1}{2}})] dx = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

用某一数值通量 $\hat{\Phi}$ 来代替 Φ 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \hat{\Phi}_h(x, y, t) v_h(x, y) dx dy - \\ & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \hat{\Phi}_h(x, y, t) \frac{\partial [u(x, y) v_h(x, y)]}{\partial x} dx dy - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Phi_h(x, y, t) \frac{\partial [v(x, y) v_h(x, y)]}{\partial y} dx dy + \\ & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} [\hat{\Phi}_h(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t) u(x_{i+\frac{1}{2}}, y) v_h(x_{i+\frac{1}{2}}, y) - \\ & \hat{\Phi}_h(x_{i-\frac{1}{2}}, y, t) u(x_{i-\frac{1}{2}}, y) v_h(x_{i-\frac{1}{2}}, y)] dy + \\ & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} [\hat{\Phi}_h(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t) v(x, y_{j+\frac{1}{2}}) v_h(x, y_{j+\frac{1}{2}}) - \\ & \hat{\Phi}_h(x, y_{j-\frac{1}{2}}, t) v(x, y_{j-\frac{1}{2}})] dx = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

数值通量 $\hat{\Phi}$ 有很多种取法^[2],通常取局部 Lax - Friedrichs 通量。(4)左边后四个积分的计算可以根据计算的精度要求选取相应的积分公式。

上述半离散格式(4)可以写成常微分方程组

$$\frac{d}{dt} \Phi_h = L_h(\Phi_h, \gamma_h) \quad (5)$$

常微分方程组(5)的时间离散采用文献[3]中带限制器的 TVD Runge - Kutta 方法。

3 数值实验

界面运动的方程用(1),在此利用二阶 RKDG 方法对常数流场、旋转流场和剪切流场做了追踪模拟,并和文献[6]中的 FCT - VOF 方法、FLAIR - VOF 方法、Hirt&Nichols 方法、Integral - averaging 方法、Yongs' VOF 方法以及 CICSAM 方法的计算结果作了比较。

算例1 常数流场。本例取自文献[6]。速度 $(u, v) = (2, -1)$, 计算区域为 $[0, 2] \times [0, 2]$, 网格为 $[200 \times 200]$ 。初值为图 1($t = 0.0$)所示的两同心方框,两方框的中心为 $(0.4, 1.6)$, 方框的边到中心的距离分别为 0.1 和 0.3。在两方框之间的区域的值为 1.0, 在其它的地方为 0.0。图 1($t = 0.5$)给出了在 $t = 0.5$ 时从 0.0625 到 0.9375 的 15 条等值线。从图 1($t = 0.5$)可以看出在角点处的分辨率较高。与文献[8]中的几种方法比较, RKDG 方法的计算结果优于 FLAIR - VOF 方法、Hirt&Nichols 方法和 Yongs' VOF 方法,与 Integral - averaging 方法、Yongs' VOF 方法差不多, FCT - VOF 方法的计算结果最好,在角点能保持尖锐,分辨率很高。

算例2 旋转流场。本例取自文献[8]。速度场为 $u(x, y) = -\pi(y - \frac{1}{2}), v(x, y) = \pi(x - \frac{1}{2})$ 。计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 网格为 $[200 \times 200]$ 。初值如图 2($t = 0$)所示的有缺口的圆周,圆

心在(0.5,0.5),半径为0.4,圆的下面有一个方形缺口,且对称,宽度为0.15。图2 ($t = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$)分别为初值图在速度场的作用下,旋转 $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 的图象。该算例是一个比较困难的

算例,一般在尖锐的角点很难保持高分辨率。可以看出,在 $t = 0.5$ 角点的分辨率是比较高的,但是随着时间的进行,角点处有所光滑化。与文献 [6]中的几种方法相比,RKDG 方法的结果比较好。Hirt&Nichols 方法相当粗糙,分辨率很低。

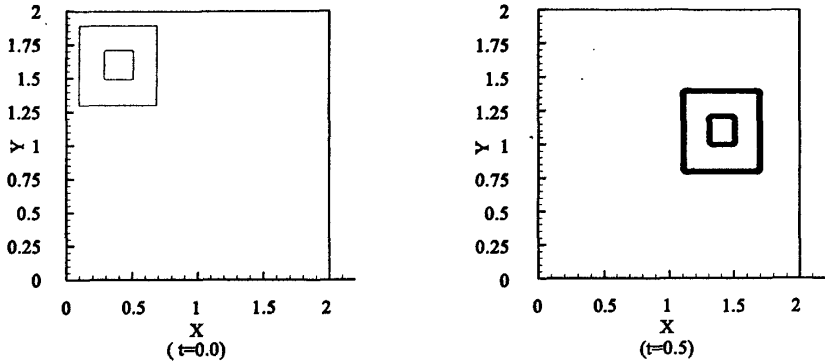


图1 常数流场的追踪模拟
Fig.1 The tracing of constant flow

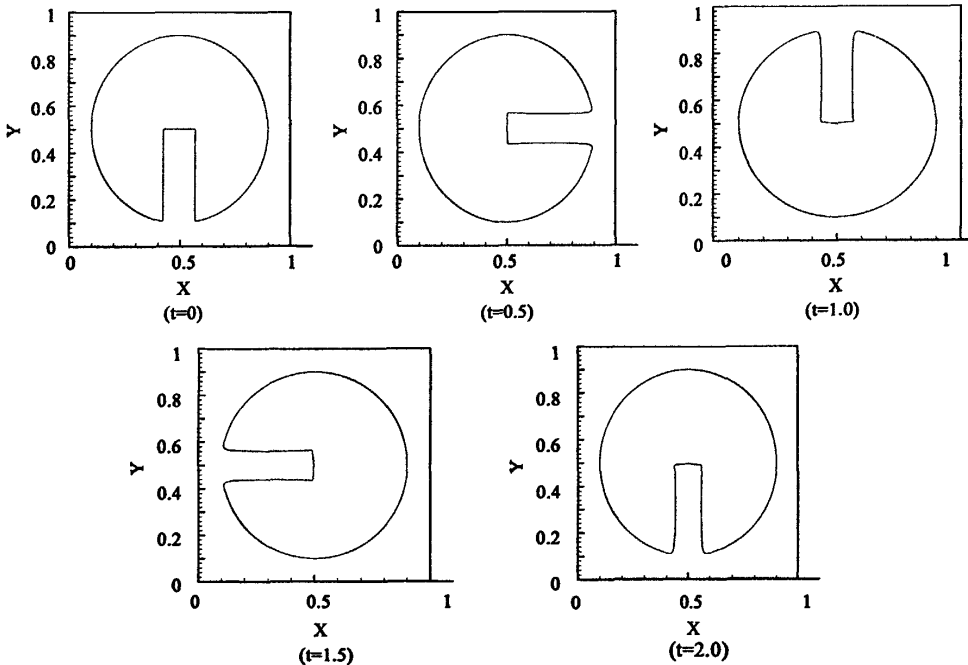


图2 旋转流场的追踪模拟
Fig.2 The tracing of rotating flow

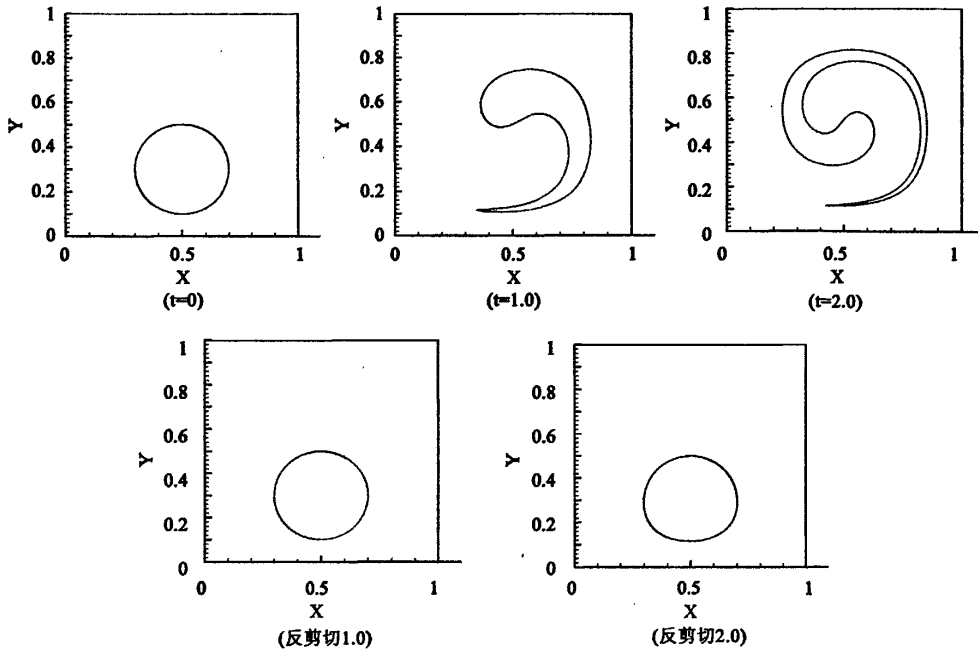


图3 剪切流场的追踪模拟
Fig.3 The tracing of shear flow

算例 3 剪切流场。本例取自文献[8]。速度场为

$$u(x, y) = \pi \cos(\pi(x - x_0)) \sin(\pi(y - y_0))$$

$$v(x, y) = -\pi \sin(\pi(x - x_0)) \cos(\pi(y - y_0))$$

我们取 $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$, 计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 初始界面如图 3($t=0$)所示, 是圆心在 $(0.5, 0.3)$, 半径为 0.2 的圆周。网格为 $[200 \times 200]$ 。图 3 给出了在 $t=1.0$ 和 $t=2.0$ 的计算结果, 以及以 $t=1.0$ 和 $t=2.0$ 的结果为初值, 将速度反号, 再反剪切 1.0 秒和 2.0 秒后的计算结果。可以看出, 在反剪切 1.0 秒后所得到的界面和初始界面基本吻合, 但是反剪切 2.0 秒后所得到的图形和初始界面有较小的差别。与文献[8]中的其它方法相比, RKDG 方法的计算结果比 Integral-averaging 方法和 Yongs' VOF 方法差, 但是比另外几种方法好。

4 结论

利用 RKDG 有限元方法追踪模拟了常数流场、旋转流场和剪切流场, 对于平流场和旋转流场模拟结果在角点处的分辨率较高, 对于剪切流场通过反剪切恢复到初始界面的效果比较好。这些


数值研究表明, RKDG 有限元方法可以精确的追踪运动界面。

参考文献:

- [1] COCKBURN B, CHI WANG SHU. TVB runge - kutta local projecting discontinuous galerkin finite element methods for conservation laws II: general framework[J]. Math. Comp., 1989, 52: 411 - 435.
- [2] COCKBURN B, HOU S. TVB runge - kutta local projecting discontinuous galerkin finite element methods for conservation laws IV: the multidimensional case[J]. J. Comput. Math., 1990, 54: 541 - 581.
- [3] COCKBURN B. TVB runge - kutta local projecting discontinuous galerkin finite element methods for conservation laws V: multidimensional systems [J]. J. Comput. Phys., 1998, 141: 199 - 224.
- [4] HIRT C W, NICHOLS B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundary [J]. J. Comput. Phys., 1981, 39: 201 - 225.
- [5] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature - dependent speed: algorithms based on hamilton - jacobi formulations [J]. J. Comp. Phys., 1988, 79: 12.
- [6] 刘儒勋, 王志峰. 数值模拟方法和运动界面的追踪 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2001.

(责任编辑 闫纯有)

利用RKDG有限元方法追踪运动界面

作者: 石国红, 冀铁果, 陈荣三, SHI Guo-hong, JI Tie-guo, CHEN Rong-san
作者单位: 石国红, 冀铁果, SHI Guo-hong, JI Tie-guo (河北工程大学, 理学院, 河北, 邯郸, 056021), 陈荣三, CHEN Rong-san (上海大学, 数学系, 上海, 200444)
刊名: 河北工程大学学报(自然科学版) 
英文刊名: JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING (NATURAL SCIENCE EDITION)
年, 卷(期): 2008, 25(1)

参考文献(6条)

1. COCKBURN B; CHI WANG SHU TVB runge-kutta local projecting discontinuous galerkin finite element methods for conservation laws II: general framework 1989
2. COCKBURN B; HOU S TVB runge-kutta local projecting discontinuous galerkin finite element methods for conservation laws IV: the multidimensional case 1990
3. COCKBURN B TVB runge-kutta local projecting discontinuous galerkin finite element methods for conservation laws V: multidimensional systems 1998
4. HIRT C W; NICHOLS B D Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundary [外文期刊] 1981
5. OSHER S; SETHIAN J A Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations [外文期刊] 1988
6. 刘儒勋; 王志峰 数值模拟方法和运动界面的追踪 2001

本文读者也读过(10条)

1. 汤玮, 何东健, TANG Wei, HE Dong-jian 基于H_RLE水平集结构的运动界面追踪研究 [期刊论文]-计算机工程与设计 2009, 30(9)
2. 刘娟, 王振国 相界面追踪方法—Level Set研究综述 [会议论文]-2009
3. 王雪瑶, 姜凡, 刘长春, 刘石, WANG Xue-yao, JIANG Fan, LIU Chang-chun, LIU Shi 基于Level Set方法的Ghost技术研究 [期刊论文]-武汉理工大学学报 2008, 30(4)
4. 谢安兵, 汪继文, XIE An-bing, WANG Ji-wen 基于网格的流体界面追踪方法分析与改进 [期刊论文]-计算机与现代化 2010(2)
5. 李栋, LI Dong 高阶传统型差分格式在Level Set方法中的应用 [期刊论文]-江苏工业学院学报 2008, 20(2)
6. 蔡力, 封建湖, 谢文贤, 周军, CAI Li, FENG Jian-hu, XIE Wen-xian, ZHOU Jun 基于四阶半离散中心迎风格式的虚拟流方法的应用 [期刊论文]-爆炸与冲击 2005, 25(2)
7. 张学莹, 赵宁, Zhang Xueying, Zhao Ning 一种追踪多介质流体界面运动的NND数值模拟方法 [期刊论文]-应用力学学报 2006, 23(1)
8. 董毅峰, 王雪瑶, 刘长春, DONG Yifeng, WANG Xueyao, LIU Changchun 捕获运动界面的有限元方法 [期刊论文]-辽宁工程技术大学学报(自然科学版) 2009, 28(2)
9. 郝静, 陈立亮, 周建新, HAO Jing, CHEN Li-liang, ZHOU Jian-xin Level Set方法在铸造充型过程数值模拟中的应用 [期刊论文]-铸造 2008, 57(4)
10. 周袁媛 复杂界面的界面追踪法 [学位论文] 2004

本文链接: http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_hbjzkjxyxb200801028.aspx