第25卷 第2期 2008年6月
河北工程大学学报(自然科学版)
Journal of Hebei University of Engineering (Natural Science Edition)
Vol.25 No.2 Jun.2008

文章编号:1673-9469(2008)02-0098-03

奇异一阶微分方程周期边值问题的正解

暴宁伟

(河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038)

摘要: 利用格林函数与锥不动点定理证明了奇异一阶微分方程周期边值问题 $\begin{cases} u'(t)+\rho^2u(t)=f(t,u(t)),0\le t\le 2\pi \\ u(0)=u(2\pi) \end{cases}$ 正解的存在性,其中允许 f 在 $u=0$ 处具有奇性且常数 $\rho\neq 0$。

关键词: 周期边值问题;奇性;格林函数;锥不动点定理

中图分类号: O241.81 **文献标识码:** A

Positive solutions to a first order singular Periodic boundary value problems

BAO Ning-wei

(College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

Abstract: In this paper, the existence of positive solutions to the following first - order singular periodic boundary value problem is proved by using Green Function and Fixed Point Theorem in cones for problem, $\begin{cases} u'(t)+\rho^2u(t)=f(t,u(t)),0\le t\le 2\pi \\ u(0)=u(2\pi) \end{cases}$ where $f(t,u)$ may appear singularity at $u=0$.

Key words: periodic boundary value problem; singular; Green Function; fixed point theorem in cones

本文研究了如下奇异一阶微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} u'(t)+\rho^2u(t)=f(t,u(t)),0\le t\le 2\pi \\ u(0)=u(2\pi) \end{cases} \quad (1)$$

若 $u'(t)=F(t,u(t))$,当 $F(t,u)\in C[I\times I,R]$,$I=[0,2\pi]$时,此时方程(1)中 $F(t,u)$没有奇性,许多作者讨论了周期边值问题(1)解的存在性,见文献[1-3]。2001年,Agarwal R. P.[4]等利用Schauder不动点定理讨论了奇异一阶方程初值问题。

$$\begin{cases} y'(t)=q(t)f(t,y) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

本文将利用锥不动点定理来研究奇异一阶微分方程周期边值问题(1)的正解的存在性。对于问题(1),做如下假设:

(H_1)对每一个固定的 $u>0$,$f(t,u)$在$[0,2\pi]$上非负可积,且$\int_0^{2\pi}f(t,u)dt>0$。

(H_2) $f(t,u)$关于变量 $u>0$连续,且存在 $\varepsilon_0>0$,使得当 $0<u\le\varepsilon_0$ 时 $f(t,u)$关于 u 单调不增。

(H_3) 存在函数 $g(u)$ 和 $h(u)$,使得 $0\le f(t,u)\le g(u)+h(u)$,$0<u<+\infty$。

其中 $g(u)>0$在$(0,+\infty)$上连续且单调不增,而 $h(u)\ge 0$于$[0,+\infty)$上连续。此外$\frac{h(u)}{g(u)}$在$(0,+\infty)$上单调不减。

(H_4) $\sup\limits_{c\in(0,+\infty)}\frac{c}{g(\delta c)[1+h(c)/g(c)]}>\frac{1}{\rho^2}$,

其中 $\delta=e^{-2\pi\rho^2}$。

本文允许$f(t,u(t)$在 $u=0$具有奇性。满足上述假设条件$(H_1)-(H_4)$的函数是存在的。其主要定理如下:

定理 假设条件(H_1)—(H_4)成立,则周期边值问题(1)存在正解。

本文用到主要引理为锥不动点定理[5]。设 E 是一个Banach空间,$K\subset E$是E中的一个锥,Ω_1和

收稿日期:2007-12-11

作者简介:暴宁伟(1971-),女,河北邯郸人,硕士,讲师,从事应用数学的教学与研究。

Ω_2 是 E 中的有界开集，$0 \in \Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2, \Phi: K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to K$ 全连续，如果 Φ 满足下列条件：

$\| \Phi u \| \geq \| u \|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1$

$\| \Phi u \| \leq \| u \|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2$

则 Φ 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 中必具有不动点。

定理的证明：用锥不动点定理和格林函数证明本文定理。

设 ε_0 充分小，由条件 (H_4) 可知，一定存在常数 $M > \varepsilon_0$，使得

$$\frac{M}{g(\delta M)[1 + \frac{h(M)}{g(M)}]} \geq \frac{1}{\rho^2} \tag{2}$$

选取适当的 $r > 0$，使得

$$r \leq \min\left\{\varepsilon_0, A\int_0^{2\pi} f(s, \varepsilon_0)\, ds\right\} \tag{3}$$

其中 A 是格林函数 G(t,s) 在 $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ 上的最小值，

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{e^{\rho^2(2\pi+s-t)}}{e^{2\pi\rho^2} - 1}, 0 \leq s \leq t \leq 2\pi \\ \dfrac{e^{\rho^2(s-t)}}{e^{2\pi\rho^2} - 1}, 0 \leq t \leq s \leq 2\pi \end{cases} \tag{4}$$

直接计算表明

$$\frac{1}{e^{2\pi\rho^2} - 1} = A \leq G(t,s) \leq B = \frac{e^{2\pi\rho^2}}{e^{2\pi\rho^2} - 1} \tag{5}$$

对所有的 $s, t \in [0,2\pi]$ 成立。

问题(1) 的可解性等价于如下积分方程的可解性[7]：

$$u(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s) f(s,u)\, ds, 0 \leq t \leq 2\pi \tag{6}$$

记 $E = C[0,2\pi]$，在其上引入范数 $\| u \| = \sup\limits_{t\in[0,2\pi]}\{\mid u(t) \mid : u \in E\}$ 并取条件 (H_4) 中的 δ，则容易验证 $K = \{u \in C[0,2\pi]; u(t) \geq \delta \| u \| \}$ 是 Banach 空间 E 中的一个锥。

由于 $f(t,u)$ 在 $u = 0$ 点可能具有奇性，定义

$$f^*(t,u) = \begin{cases} f(t, r\delta), u \leq r\delta \\ f(t,u), u \geq r\delta \end{cases} \tag{7}$$

则当 $u \geq r\delta$ 时 $f^*(t,u) = f(t,u)$。

在 Banach 空间 $E = C[0,2\pi]$ 中，定义 $E \to E$ 中的映射 Φ 如下：

$$(\Phi u)(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s) f^*(s,u)\, ds \tag{8}$$

则易得若(8) 的 E 中具有不动点 $u > 0$，且 $\| u \| \geq r$，由锥 K 的定义 $\| u \| \geq r\delta$，从而 u 是问题(1) 的正解。

应用 Arzela - Ascoli 定理，我们可以证明 $\Phi: K \to K$ 是全连续的。

证明：首先证明对 K 中任意有界集 $B, \Phi(B)$ 是列紧集。由 Arzela - Ascoli 定理 $\Phi(B)$ 是列紧集的充分必要条件是：它是一致有界和等度连续的。

先证明 $\Phi(B)$ 在 K 上一致有界。

设 B 是 K 中的任意有界集，则存在常数 $c_0 > 0$，使得 $u \in B$，有 $\| u \| = \sup\{\mid u(t) \mid : 0 \leq t \leq 2\pi\} \leq c_0$

记 $L = \sup \mid G(t,s) f^*(s,u) \mid, (t,s) \in [0, 2\pi] \times [0,2\pi], \| u \| \leq c_0$

那么 $\mid (\Phi u)(t) \mid = \mid \int_0^{2\pi} G(t,s) f^*(s,u)\, ds \mid \leq 2\pi L, \forall u \in B$

因此 $\Phi(B)$ 中的元素在 K 上一致有界。

再证 $\Phi(B)$ 中的诸函数具有等度连续性。

对任意的 $\varepsilon > 0$，由 $G(t,s) f^*(s,u)$ 在 $[0, 2\pi] \times [0,2\pi] \times [0, c_0]$ 上连续，从而一致连续，故存在 $\delta > 0$，使得当 $t_1, t_2 \in [0,2\pi]$，$\mid t_1 - t_2 \mid < \delta$ 时恒有

$$\mid G(t_1,s) f^*(s,u) - G(t_2,s) f^*(s,u) \mid < \frac{\varepsilon}{1 + 2\pi} \quad \forall s \in [0,2\pi], u \in [0, c_0]$$

于是当 $\mid t_1 - t_2 \mid < \delta$ 时，对任意 $u \in B$ 有

$$\mid (\Phi u)(t_1) - (\Phi u)(t_2) \mid = \left| \int_0^{2\pi} [G(t_1,s) f^*(s,u) - G(t_2,s) f^*(s,u)]\, ds \right| < \frac{2\pi\varepsilon}{1 + 2\pi} < \varepsilon$$

它就证明了 $\Phi(B)$ 具有等度连续性，从而 $\Phi(B)$ 是列紧集。

其次证明 Φ 的连续性。

设 $\{u_n\}$ 在 K 中收敛于 u_0，则 $\{u_n\}$ 在 K 中有界，因此存在常数 c_1，使得当 $t \in [0,2\pi]$ 时，有 $\mid u_n \mid \leq c_1, (n = 1,2,3\cdots)$。对任意 $\varepsilon > 0$，由 $G(t, s) f^*(s,u)$ 在 $[0,2\pi] \times [0,2\pi] \times [0, c_1]$ 上的一致连续性可知，存在 $\delta > 0$，使得当 $u_1, u_2 \in [0, c_1]$ 且 $\mid u_1 - u_2 \mid < \delta$ 时恒有

$$\mid G(t_1,s) f^*(s,u_1) - G(t_2,s) f^*(s,u_2) \mid < \frac{\varepsilon}{1 + 2\pi}$$

由于 $\{u_n\}$ 在 K 中收敛于 u_0，故存在自然数 N，使当 $n > N$ 时恒有 $\| u_n - u_0 \| < \delta$，于是

$\mid (\Phi u_n)(t) - (\Phi u_0)(t) \mid =$

$$\left|\int_0^{2\pi}[G(t_1,s)f^*(s,u_n)-G(t_2,s)f^*(s,u_0)]ds\right|$$

$$<\frac{2\pi\varepsilon}{1+2\pi}<\varepsilon$$

从而 $\|\Phi u_n-\Phi u_0\|<\delta$。综上所述,由全连续的定义可知 $\Phi:K\to K$ 是全连续的。证毕。

下证 $\Phi(K)\subset K$。

由 Φ 的定义,注意到(6),对任意的 $u\in K$ 有

$$(\Phi u)(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)f^*(s,u)ds\leq B\int_0^{2\pi}f^*(s,u)ds$$

又由 E 上范数的定义,有 $\|\Phi u\|\leq B\int_0^{2\pi}f^*(s,u)ds$,则

$$(\Phi u)(t)\geq A\int_0^{2\pi}f^*(s,u)ds\geq\frac{A}{B}\|\Phi u\|=\delta\|\Phi u\|,0\leq t\leq 2\pi$$

这就表明,$\Phi(K)\subset K$。

下面证明本文的定理。

证明:在假设条件下$(H_1)-(H_4)$,$(\Phi u)(t)$存在不动点。

设 $u\in K$ 且 $\|u\|=r$,则由 K 的定义,有 $u(t)\geq\delta\|u\|=r\delta$

由条件(H_2),(H_4)以及(7)(8)式有

$$(\Phi u)(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)f^*(s,u)ds=\int_0^{2\pi}G(t,s)f(s,u)ds\geq\int_0^{2\pi}G(t,s)f(s,r)ds\geq\int_0^{2\pi}Af(s,r)ds\geq A\int_0^{2\pi}f(s,\varepsilon_0)ds\geq r=\|u\|$$

因此,如果令 $\Omega_1=\{u\in E;\|u\|<r\}$,则上式表明

$$\|\Phi u\|\geq\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_1 \tag{9}$$

另一方面,设 $u\in K$ 且 $\|u\|=M$,由于 $M>\varepsilon_0$ 所以 $M>r$,则 $u(t)\geq\delta M\geq\delta r$,由条件$(H_3)$,$(H_4)$以及(7)(8)式有

$$(\Phi u)(t)=\int_0^{2\pi}G(t,s)f^*(s,u)ds=\int_0^{2\pi}G(t,s)f(s,u)ds\leq\int_0^{2\pi}G(t,s)[g(u)+h(u)]ds=\int_0^{2\pi}G(t,s)g(u)\left[1+\frac{h(u)}{g(u)}\right]ds\leq\int_0^{2\pi}G(t,s)g(\delta M)\left[1+\frac{h(M)}{g(M)}\right]ds=\frac{1}{\rho^2}g(\delta M)\left[1+\frac{h(M)}{g(M)}\right]\leq M=\|u\|,0\leq t\leq 2\pi$$

因此,如果令 $\Omega_2=\{u\in E;\|u\|<M\}$,则上式表明

$$\|\Phi u\|\leq\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_2 \tag{10}$$

这样,由 Φ 的全连续性及(9)(10)式以及锥不动点引理可知,Φ 在 $u\in K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中存在不动点 u,且再由 K 的定义,$u(t)\geq\delta\|u\|\geq\delta r>0$,因此 u 是(6)式的正解,亦是周期边值问题(1)的正解。

综上所述,定理结果成立,证毕。

参考文献:

[1] 刘辉昭,蒋达清,赵胜民.一阶隐式微分方程周期边值问题[J].数学杂志,1999,19(2):157-160.

[2] 万阿英,蒋达清.奇异超线性二阶周期边值问题的正解[J].吉林大学学报(自然科学版),2001,21(2):25-27.

[3] 陈洁.一阶微分方程周期边值问题的解的存在性[J].数学物理学报,2003,23(2)A:129-134.

[4] AGARWAL R P, REGAN D O. A note on existence of nonnegative solutions to singular semipositone problems[J]. Nonlinear Analysis,1999,36(2):615-622.

[5] 郭大均.非线性泛函分析[M].济南:山东科技出版社,1995.

[6] 暴宁伟.一类高阶微分方程边值问题正解的存在性[J].河北工程大学学报,2007,24(2):108-110.

(责任编辑 闫纯有)

奇异一阶微分方程周期边值问题的正解

作者： 暴宁伟， BAO Ning-wei
作者单位： 河北工程大学,理学院,河北,邯郸,056038
刊名： 河北工程大学学报（自然科学版）ISTIC
英文刊名： JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)： 2008,25(2)

参考文献(6条)

1. 刘辉昭;蒋达清;赵胜民 一阶隐式微分方程周期边值问题 1999(02)

2. 万阿英;蒋达清 奇异超线性二阶周期边值问题的正解[期刊论文]-吉林大学学报(理学版) 2001(02)

3. 陈洁 一阶微分方程周期边值问题的解的存在性[期刊论文]-数学物理学报 2003(2A)

4. AGARWAL R P;REGAN D O A note on existence of nonnegative solutions to singular semipositone problems 1999(02)

5. 郭大均 非线性泛函分析 1995

6. 暴宁伟 一类高阶微分方程边值问题正解的存在性[期刊论文]-河北工程大学学报(自然科学版) 2007(02)

引证文献(6条)