文章编号:1673-9469(2008)02-0104-03

求自由振动固有频率的一种数值计算方法

庞培林,张志海
(河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038)

摘要:针对自由度 $n \le 5$ 系统的自由振动,探讨了频率方程的确定、重根存在的判别及无重根时方程全部根的求法。以此为基础,给出了计算系统的固有频率及其模态的一种数值计算算法。

关键词:固有频率;本征方程;模态;方程的重根;方程的单根
中图分类号: O241.6　　文献标识码:A

A numerical method of finding natural frequencies for free vibration

PANG Pei-lin, ZHANG Zhi-hai
(College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

Abstract: The determination of frequency equation, discriminant of repeated root existence and solution of its roots without repeated one are discussed for free vibration of Multi - Degree - of - Freedom linear systems. A numerical method of finding its natural frequencies and mode is given basing above.

Key words: natural frequency; eigenequation; model; single root; repeated root

大于一的有限个独立坐标描述的振动系统被称为多自由度系统。无外力作用的多自由度系统受到初始扰动后,即产生自由振动。自由振动下,若假定广义坐标列阵 $x=(x_j)$,质量矩阵 $M=(m_{ij})$和刚度矩阵 $K=(k_{ij})$,则自由度 n 的线性系统其动力学方程为 $M\ddot{x}+Kx=0$。

对此系统,分析研究的基本方法为模态叠加法,而使用模态叠加法的关键是求系统的固有频率及所对应的模态,此问题可归结为矩阵 K,M 的广义本征问题[1,2],$(K-\omega^2M)x=0$。

即求 ω^2 的 n 次代数方程 $|K-\omega^2M|=\omega^{2n}+a_1\omega^{2(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\omega^2+a_n=0$ 的根和线性方程组 $(K-\omega^2M)x=0$ 的特定解。

显然,当自由度 $n>3$ 时,以上问题使用代数理论的方法求解是非常困难的,因而有必要研究求解该问题的数值算法。本文针对自由度 $n\le 5$ 的情况,给出求固有频率及相应模态的数值算法。

1 本征多项式的求法

鉴于振动系统的质量矩阵为对称正定矩阵,所以对矩阵 M 使用改进的平方根法[3]完成分解 $M=LDL^T$。

这里,L 为单位下三角矩阵,令 $\lambda=\omega^2$,则上述广义本征问题可转为求本征方程 $|(L^T)^{-1}D^{-1}L^{-1}K-\lambda E|=0$ 的根及方程组 $(L^T)^{-1}D^{-1}L^{-1}Kx-\lambda x=0$ 的解。

关于求本征方程,有

定理1　设 $A=(L^T)^{-1}D^{-1}L^{-1}K=(a_{ij})_{n\times n}$,则矩阵 A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=|A|-\lambda\sum_{k=1}^{n}A_k+\lambda^2\sum_{1\le i_1<i_2\le n}A_{i_1i_2}+\cdots+(-1)^k\lambda^k\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}A_{i_1i_2\cdots i_k}+\cdots+(-1)^n\lambda^n$$

其中 $A_{i_1i_2\cdots i_k}$为矩阵A 连续划掉元素 $a_{ij}(j=i_1,i_2,\cdots,i_k)$所在的行和列元素所得的子式。

证明:以 $n=5$ 情况给出证明,一般可用数学归纳法类似可得。由行列式性质可知

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}-\lambda \end{vmatrix} -$$

收稿日期:2008-03-05
作者简介:庞培林(1975-),男,河北滦南人,讲师,从事计算数学的教学与研究工作。

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44}-\lambda & a_{45} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}-\lambda \end{vmatrix}$$

重复利用上述性质即可证明。

显然,利用 MATLAB 及其它软件,很容易确定每一个行列式的值,进而达到定出本征多项式的目的。

2 本征方程重根存在的判别及确定方法

设矩阵的本征多项式为一元 n 次代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

若方程有重根 $-c$,则由多项式理论

$$f(x)=p_{n-2}(x)\cdot(x+c)^2$$

设

$$p_{n-2}(x)=b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\cdots+b_{n-2}$$

则

$$p_{n-2}(x)\cdot(x^2+2cx+c^2)=b_0x^n+(2b_0c+b_1)x^{n-1}+(b_0c^2+2b_1c+b_2)x^{n-2}+(b_1c^2+2b_2c+b_2)x^{n-3}+\cdots+(b_{i-2}c^2+2b_{i-1}c+b_i)x^{n-1}+\cdots+(b_{n-4}c^2+2b_{n-3}c+b_{n-2})x^2+(b_{n-3}c^2+2b_{n-2}c)x+b_{n-2}c^2$$

比较系数可得

$$\begin{cases} b_0=a_0 \\ 2cb_0+b_1=a_1 \\ b_i+2cb_{i-1}+b_{i-2}c^2=a_i \quad (i=2,\cdots,n-2) \\ 2cb_{n-2}+b_{n-3}c^2=a_{n-1} \\ c^2b_{n-2}=a_n \end{cases}$$

若方程有重根 $-c$,则上述方程组有解,且解是唯一的,将上述方程组用矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2c & 1 & & \\ c^2 & 2c & \ddots & \\ & c^2 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 2c \\ & & & c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

且系数矩阵的秩为 $n-2$,方程的增广矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & a_0 \\ 2c & 1 & & & & & & a_1 \\ c^2 & 2c & 1 & & & & & a_2 \\ & c^2 & 2c & 1 & & & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 & & \vdots \\ & & & & \ddots & 2c & 1 & a_{n-2} \\ & & & & & c^2 & 2c & a_{n-1} \\ & & & & & & c^2 & a_n \end{bmatrix}$$

对使用初等变换,则有

$$A\sim\begin{bmatrix} 1 & & & a_{1(n+1)} \\ 0 & 1 & & a_{2(n+1)} \\ 0 & \ddots & & \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots\ 1 & \vdots \\ & & \ddots\ 0 & \vdots \\ & & 0 & a_{(n+1)(n+1)} \end{bmatrix}$$

$$a_{k(n+1)}=\sum_{i=1}^{K}(-1)^{i-1}iq_{k-i}C^{i-1}$$

为使方程组有解,则 c 应满足

$$f'(-c)=a_{n-1}-2ca_{n-2}+3a_{n-3}c^2+\cdots+(-1)^{n-1}na_0c^{n-1}=0 \tag{1}$$

$$a_n-a_{n-2}c^2+2a_{n-3}c^3+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)a_0c^n=0 \tag{2}$$

因 $x=-c$ 为方程的根,所以

$$a_n-a_{n-1}c+a_{n-2}c^2+\cdots+(-1)^na_0c^n=0 \tag{3}$$

则(3)式乘$(n-1)$加(2)式得

$$na_n-(n-1)a_{n-1}c+(n-2)a_{n-2}c^2+\cdots+(-1)^i(n-i)a_{n-i}c^i\cdots+(-1)^{n-1}a_ic^{n-1}=0$$

若 $a_1=0$,则直接可以得到关于 c 的一个 $n-2$ 次方程

$$na_n-(n-1)a_{n-1}c+(n-2)a_{n-2}c^2+\cdots+(-1)^i(n-i)a_{n-i}c^i\cdots+(-1)^{n-2}2a_2c^{n-2}=0$$

若 $a_1\neq0$,则有

$$(n^2a_na_0-a_{n-1}a_1)-[n(n-1)a_{n-1}a_0-2a_{n-2}a_1]c+\cdots+(-1)^i[n(n-i)a_{n-i}a_0-(i+1)a_{n-i-1}a_1]c^i+\cdots+(-1)^{n-2}[2na_2a_0-(n-1)a_1^2]c^{n-2}=0$$

由此可以得到如下结论:

定理 2　给定代数方程 $f(x)=0$,若 $x=-c$ 为方程的重根,则 c 在满足

$$a_{n-1}-2ca_{n-2}+3a_{n-3}c^2+\cdots+(-1)^{n-1}na_0c^{n-1}=0 \tag{4}$$

情况下还需满足

(1) $a_1=0$ 时

$$na_n-(n-1)a_{n-1}c+(n-2)a_{n-2}c^2+\cdots+(-1)^i(n-i)a_{n-i}c^i\cdots+(-1)^{n-2}2a_2c^{n-2}=0$$

(2) $a_1\neq0$ 时

$$(n^2a_na_0-a_{n-1}a_1)-[n(n-1)a_{n-1}a_0-2a_{n-2}a_1]c+\cdots+(-1)^i[n(n-i)a_{n-i}a_0-(i+1)a_{n-i-1}a_1]c^i+\cdots+(-1)^{n-2}[2na_2a_0-(n-1)a_1^2]c^{n-2}=0$$

根据上述结论,判断 $n\leq5$ 时的 $f(x)=0$ 有无重根,可先求出一个 3 次代数方程的根,再代入(4)式,若满足,则 $f(x)=0$ 有重根,重数可由导函

数为零的阶数来定。

3 本征方程无重根时根的求法

下边以 $n=5$ 情况,给出无重根时代数方程求根的方法。设方程 $x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$ 的根为 $x_1=-\lambda_1, x_2=-\lambda_2, x_3=-\lambda_3, x_4=-\lambda_4, x_5=-\lambda_5, \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5)^T$,则由 Vieta 定理[4]可知

$$f_1(\lambda)=\sum_{i=1}^{5}\lambda_i-a_i=0$$

$$f_2(\lambda)=\sum_{1\le i_1<i_2\le 5}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}-a_2=0$$

$$f_3(\lambda)=\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 5}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}-a_2=0$$

$$f_4(\lambda)=\sum_{1\le i_1<i_2<i_3<i_4\le 5}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\lambda_{i_3}\lambda_{i_4}-a_2=0$$

$$f_5(\lambda)=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5-a_5=0$$

将上述方程联立,根据多项式理论,所得方程组有唯一解。若记

$$F(\lambda)=(f_1(\lambda),f_2(\lambda),f_3(\lambda),f_4(\lambda),f_5(\lambda))^T$$

则由高斯消去法可得,$F'(\lambda)$是一可逆矩阵,故有

定理 3 对 $F(\lambda)=0$,若选准确值 λ^* 的初始近似为 $\lambda^{(0)}$,则迭代式

$$\lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}-[F'(\lambda^{(k)})]^{-1}F(\lambda^{(k)})$$

$$k=0,1,2,\cdots$$

当 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*)^T$ 中的各分量为一组两两互异的数值,且 $\lambda^{(0)}$ 充分接近 λ^* 时收敛,其收敛速度为二次的。

证明:因为 $F(\lambda)$于 λ^* 处某邻域内二次 F-可微,且 $F'(\lambda)$, $F''(\lambda)$连续,$F'(\lambda^*)$可逆,且$[F'(\lambda^*)]^{-1}$有界,所以对 $F(\lambda)=0$ 使用 Newton 法的康托洛维奇定理[4]可知迭代式

$$\lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}-[F'(\lambda^{(k)})]^{-1}F(\lambda^{(k)})$$

当 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\lambda_3^*,\lambda_4^*,\lambda_5^*)^T$ 中的各分量为一组两两互异的数值,且 $\lambda^{(0)}$充分接近 λ^* 时收敛,且收敛速度为二次的。

为避开计算$[F'(\lambda)]^{-1}$,上述迭代式可改为如下形式

$$\begin{cases}\lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}+\triangle\lambda^{(k)}\\ F'(\lambda^{(k)})\triangle\lambda^{(k)}+F(\lambda^{(k)})=0, k=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

解决了固有频率即广义特征值的计算之后,鉴于在求模态问题上所面对的是系数矩阵的阶数最大为 5 阶的线性方程组的求解,因而使用通常的算法,比如消元法、LU 分解法等即可求得对应于每个固有频率的模态。

4 计算步骤

1)利用改进的平方根法完成矩阵 M 分解,并求出相关的逆矩阵,进而定出矩阵 A。

2)利用定理 1 确定 A 的特征方程。

3)利用定理 2 判别方程是否有重根。

$n=5$ 时,对得到的三次方程或直接分解定出其根,或使用劈因子法定出其根的近似值,并确定根的重数。

4)求出分解式 $p_m(x)(x-x_0)^k(x-x_1)^l$,其中 k,l 为重根的重数。

5)利用定理 3 求出方程 $p_m(x)=0$ 的所有的单根。

6)求出每一个特征值所对应的特征向量。

实例计算表明,利用上述方法在计算机上实现是可行的,且收敛速度较快并具有较高的精度。

参考文献:

[1] 刘延柱,陈文良,陈力群.振动力学[M].北京:高等教育出版社,2003.

[2] 李俊林,牛学仁,刘利亭. 求解对称矩阵特征值及特征向量的初等变换法[J].力学与实践,2005,27:74-76.

[3] 李庆扬. 数值分析[M].武汉:华中科技大学出版社,2006.

[4] 蒋尔雄. 对称矩阵计算[M]. 上海:科技出版社,1984.

[5] 庞培林,董玉振,栗文国,等.Σ已知时 $\mu=\mu_0$ 的检验与 μ 的置信区域的一种数值方法[J].河北建筑科技学院学报,2005,22(1):110-112.

[6] 张志海,田伶改.求无重根时代数方程根的一种数值迭代方法[J]. 高等学校计算数学学报,2001,23(1):38-44.

[7] RAN RUI SHENG. An algorithm for the inverse of a class of block tridiagonal matrices[J]. Chinese Journal of Computation Physics,2005,(09):412-416.

(责任编辑 闫纯有)

求自由振动固有频率的一种数值计算方法

作者： 庞培林， 张志海， PANG Pei-lin， ZHANG Zhi-hai
作者单位： 河北工程大学,理学院,河北,邯郸,056038
刊名： 河北工程大学学报（自然科学版） ISTIC
英文刊名： JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)： 2008,25(2)

参考文献(7条)

1. 刘延柱;陈文良;陈力群 振动力学 2003

2. 李俊林;牛学仁;刘利亭 求解对称矩阵特征值及特征向量的初等变换法[期刊论文]-力学与实践 2005(1)

3. 李庆扬 数值分析 2006

4. 蒋尔雄 对称矩阵计算 1984

5. 庞培林;董玉振;栗文国 ∑已知时μ=μ0的检验与μ的置信区域的一种数值方法[期刊论文]-河北建筑科技学院学报（自然科学版） 2005(01)

6. 张志海;田伶改 求无重根时代数方程根的一种数值迭代方法[期刊论文]-高等学校计算数学学报 2001(01)

7. RAN RUI SHENG An algorithm for the inverse of a class of block tridiagonal matrices[期刊论文]-Chinese Journal of Computational Physics 2005(09)