第25卷 第2期　　河北工程大学学报(自然科学版)　　Vol.25 No.2
2008年6月　　Journal of Hebei University of Engineering (Natural Science Edition)　　Jun.2008

文章编号:1673-9469(2008)02-0107-03

图的参数与因子及分数因子的几个结果

赵雪婷[1],刘红芳[2],时翠梅[1],赵晓芬[1]
(1.河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038;2.唐山学院 专科教育部,河北 唐山 063020)

摘要:本文研究了图中两个重要的参数联结数和韧度,以及两个参数与因子和分数因子之间关系,并证明了图有分数因子的一个充分条件;还探讨了子图的结构,得出了子图的任一分支的韧度与图本身的韧度的关系。

关键词:因子;分数因子;韧度;孤立韧度;联结数
中图分类号: O157.5　　**文献标识码**:A

Some results on parameters and factors and fractional factors of graphs

ZHAO Xue-ting[1], LIU Hong-fang[2], SHI Cui-mei, ZHAO Xiao-fen
(1.College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China;
2.Faculty Ministry of Education, Tangshan College, Tangshan 063020, China)

Abstract: Toughness and binding number are two important parameters in graph theory. In this paper, we study the relationship between parameters and factors, fractional factors of graphs. We prove a sufficient condition for the existence of fractional factors in graphs; we also explore the structure of subgraphs and give the relationship of the toughness of any branch of the graphs and their own.

Key words: factor; fractional factor; toughness; isolated toughness; binding number

图的因子理论是图论中的一个重要分支,也是最为活跃的研究课题之一,分数因子的研究是近年来提出的新问题。关于因子的最早的结果是1952年Tutte提出的Tutte定理[1],给1-因子的研究提供了有力的工具。1970年,Lovasz给出了图有(g,f)因子的一个充要条件[2],为因子理论的研究奠定了基础。关于分数图论的许多结果可以在Schinerman等人的Fractional Graph Theory中找到,图的参数和因子及分数因子的关系是图的因子理论中人们较为关注的研究方向。本文也是继续研究图中的重要参数和因子的关系,并得到了这方面的几个结论,对图的因子理论作了补充。

1 预备知识

1.1 符号记法

本文所考虑的图均为没有环和重边的无向连通图。设G是一个图,具有顶点集合$V(G)$和边集合$E(G)$。用$d_G(x)$表示图G中顶点x的度,用$\delta(G)$表示G的最小度,用$\triangle(G)$表示G的最大度。对$V(G)$的子集S,用$G-S$表示从G中删去顶点集合S及其关联的边所得的子图。若$S=\{x\}$,则令$G-x=G-\{x\}$,图G的分支数记为$\omega(G)$。对任意的$S\subseteq V(G)$,$G-S$的孤立顶点数记为$i(G-S)$,用$|S|$表示集合S中含有元素的数目,即集合S的范数。对任意的$x\in V(G)$,x在G中的邻集记为$N_G(x)$,对应地,对任意的$S\subset V(G)$,$N_G(S)$为S在G中的邻集。

1.2 相关定义

定义1(图的韧度)当图G不是完全图时,$t(G)=\min\left\{\frac{|S|}{\omega(G-S)}:S\subseteq V(G),\omega(G-S)\geq 2\right\}$,其中$\omega(G-S)$表示$G-S$的连通分支数,否则$t(G)=\infty$。该定义是由Chvatal[3]引入的。

定义2(图的孤立韧度$I(G)$)当图不是完全图

收稿日期:2007-11-01
作者简介:赵雪婷(1979-),河北邯郸人,助教,从事基础数学教学与研究工作。

时，$I(G)=\min\left\{\frac{|S|}{i(G-S)}:S\in V(G),i(G-S)\geq 2\right\}$

其中 $i(G-S)$ 是 $G-S$ 中孤立顶点的数目；否则定义 $I(G)=\infty$。该定义是由刘桂真与马英红[4]提出。

定义 3(图的联结数)设 G 是一个图，G 的联结数 $bind(G)=\min\left\{\frac{N_G(X)}{|X|}:\phi\neq X\subset V(G),\right.$ $\left.N_G(G)\neq V(G)\right\}$。该定义是由 Woodall[5]提出的。

定义 4 设 g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的两个整数值函数，使得对任意的 $x\in V(G)$，有 $0\leq g(x)\leq f(x)$。设 H 是 G 的一个支撑子图，对 H 的每个顶点 x，$g(x)\leq d_G(x)\leq f(x)$ 都成立，则称 H 为 G 的一个 (g,f)－因子。若对任意的 $x\in V(G)$，有 $g(x)=a,f(x)=b$，则称 (g,f)－因子为 $[a,b]$－因子。若 $a=b=k$，则称 (g,f)－因子为 k－因子，$k=1$ 时也称 1－因子为完美对集。

定义 5 设 h 是定义在图 G 的边集合上的一个函数，使得对任意的 $e\in E(G)$，有 $h(e)\in[0,1]$，令 $d_G^h(x)=\sum_{e\in E_x}h(x)$，其中 $E_x=\{e:e=xy\in E(G)\}$，则称 $d_G^h(x)$ 是 G 的顶点 x 的分数度。若对任意 $x\in V(G)$，h 满足不等式 $g(x)\leq d_G^h(x)\leq f(x)$，则称 h 为 G 的一个分数 (g,f)－表示函数。设 G_h 是图 G 的一个支撑子图，令 $E^h=\{e:e\in E(G)且\ h(e)\neq 0\}$，使得 $E(G_h)=E^h$，则称 G_h 为 G 的一个分数 (g,f)－因子，称 h 为 G_h 的表示函数。若对任意的 $x\in V(G)$ 有 $g(x)=0,f(x)=1$，则称分数 (g,f)－因子为分数 $(0,1)$－因子。若对任意的 $x\in V(G)$，有 $g(x)=f(x)=1$，则称分数 (g,f)－因子为分数 1－因子。

1.3 相关定理

定理 A[7]：设 G 是一个完全图，则 G 有分数 $[a,b]$－因子，当且仅当对于 $V(G)$ 中的任意子集 S，有 $a|T|-d_{G-S}(T)\leq b|S|$，其中 $T=\{x:x\in V(G)\setminus S,d_{G-S}\leq a\}$。

定理 B[8]：设 G 不是一个完全图，若存在 $S_0\subseteq V(G)$，且 $i(G-S_0)\geq 2$，使得 $I(G)=\frac{|S_0|}{i(G-S_0)}$，则对 $G-S_0$ 的任何分支 C 都有 $I(C)\geq I(G)$。

文中未加说明的符号与术语请参见文献[6]和[9]。

2 结论

定理 1 设 G 是个连通图，且 $|V(G)|\geq 2,a\geq 1$，且 a 是整数。如果图的联结数 $bind(G)\geq\frac{1}{a}+1$，则 G 有分数 $[1,a]$ 因子。

证明：记 $bind(G)=b$，设 S 是 $V(G)$ 的一个任意子集。由定理 A，我们只要证 $|T|-d_{G-S}(T)\leq a|S|$ 即可，其中 $T=\{x:x\in V(G)\setminus S,d_{G-S}(x)\leq 1\}$。

令 $T_0=\{x:x\in V(G)\setminus S,d_{G-S}(x)=0\}$，$T_1=\{x:x\in V(G)\setminus S,d_{G-S}(x)=1\}$，显然，$T=T_0\cup T_1$，$|T_0|=i(G-S)$。因此，$|T|-d_{G-S}(T)=i(G-S)\leq a|S|$。

如果 $S=\phi$，则显然有 $i(G-S)=0=a|S|$。

如果 $S\neq\phi$ 且 $i(G-S)\leq 1$，则 $i(G-S)\leq a|S|$。

现在我们用反证法证 $S\neq\phi$ 且 $i(G-S)\geq 2$ 的情形，设

$$|T|-d_{G-S}(T)=i(G-S)>a|S| \tag{1}$$

令 $X=V(G)-S$。由 $i(G-S)\geq 2$ 易得 $N_G(X)\neq V(G)$。因此 $|V(G)|-i(G-S)\geq|N_G(X)|\geq b|X|=b|V(G)|-b|S|$，即

$$i(G-S)\leq b|S|-(b-1)|V(G)| \tag{2}$$

由于 $w(G-S)\geq i(G-S)$，由(1)和(2)得

$$w(G-S)-i(G-S)>a|S|-b|S|+(b-1)|V(G)| \tag{3}$$

$$|V(G)|\geq|S|+i(G-S)+2[w(G-S)-i(G-S)] \tag{4}$$

合并(3)式和(4)式得

$$(2b-3)(|V(G)|-|S|)<2|S|-i(G-S) \tag{5}$$

$$|V(G)|-|S|\geq i(G-S)$$

由(5)可导出 $(2b-3)i(G-S)<2|S|-i(G-S)$，$(2b-3)i(G-S)<2|S|$。

由于 $i(G-S)\geq a|S|$，有 $(2b-2)a|S|<2|S|$，即 $b<\frac{1}{a}+1$。

这与已知的 $b\geq\frac{1}{a}+1$ 矛盾，所以此定理得证。从而我们得到了图有分数因子的一个充分条件。

定理 2 设 G 不是一个完全图，若存在 $S_0\subseteq V(G)$，且 $i(G-S_0)\geq 2$，使得 $t(G)=\frac{|S_0|}{\omega(G-S_0)}$，则对 $G-S_0$ 的任何分支 C 都有 $t(C)\geq\frac{t(G)}{t(G)+1}$。

证明:假设 $t(G)=\frac{|S_0|}{\omega(G-S_0)}$,其中 $S_0\subseteq V(G)$,且 $\omega(G-S_0)\geq 2$,则

$$\omega(G-S_0)=\frac{|S_0|}{t(G)} \qquad (6)$$

设 C 是图 $G-S_0$ 的任意一个分支,若 C 是完全图,则由 $t(G)$ 的定义,易知结论正确。假设图 C 不是完全图,取 $R_0\subseteq V(G)$,使得 $\omega(C-R_0)\geq 2$,并且 $t(C)=\frac{|R_0|}{\omega(C-R_0)}$成立,则得

$$\omega(C-R_0)=\frac{|R_0|}{t(C)} \qquad (7)$$

令 $T=S_0\cup R_0$, 则由(6)和(7)式得

$$\omega(G-T)=\omega(G-S_0\cup R_0)=\omega(G-S_0)+\omega(C-R_0)-1=\frac{|S_0|}{t(G)}+\frac{|R_0|}{t(C)}-1 \qquad (8)$$

$$\omega(G-T)\leq\frac{|T|}{t(G)}=\frac{|S_0|+|R_0|}{t(G)}=\frac{|S_0|}{t(G)}+\frac{|R_0|}{t(C)} \qquad (9)$$

由(8)和(9)式知,$\frac{|R_0|}{t(G)}\geq\frac{|R_0|}{t(C)}-1$,因此,$t(C)\geq\frac{|R_0|\cdot t(G)}{|R_0|+t(G)}\geq\frac{t(G)}{t(G)+1}$。

通过该定理探讨了子图的结构,得出了子图的任一分支的韧度与图本身的韧度的关系。

3 讨论的问题

如果存在函数 $h:E(G)\to[0,1]$,满足 $\sum_{e\in E(G)}h(e)=|V(G)|$,且对所有的 $\phi\subset S\subset V(G)$,有 $\sum_{e\in[S,\bar{S}]}h(e)\geq 2$,其中$[S,\bar{S}]$是所有的恰好有一个端点在S中的边集合,则称图G是分数哈密顿的。那么图中的联结数和分数哈密顿的关系如何现在尚未确定,所以图中联结数与分数哈密顿的关系又可作进一步讨论。

参考文献:

[1] TUTTE W T. The factors of graphs[J]. Canad J Math., 1952, (4):314-328.

[2] LOVASZ L. Subgraphs with prescribed valencies[J]. J Combin Theory, 1970, 89:329-416.

[3] CHVATAL V. Tough graphs and hamiltonian circuits[J]. Discrete Math., 1973, 5:215-228.

[4] JIANBO YANG, YINGHONG MA, GUIZHEN LIU. Fractional (g,f)-factors in graphs[J]. Appl. Math. J Chinese Univ. (Series A), 2001, 16(4):385-390.

[5] WOODALL D R. The binding number of a graph and its Anderson number[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1973, 15:225-255.

[6] BOND Y J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: Macnmillan, 1976.

[7] ZHANG LANJU, LIU GUIZHEN. Frantional k-factor of graphs [J]. Journal of System Science and Mathematical Sciences, 2001, 21(1):88-92.

[8] 马英红.关于图的分数因子的若干结果[D].济南:山东大学,2002.

[9] 孙文星,马英红.边可消去图的[a,b]-因子的存在性[J].山东师范大学学报,2007,22(1): 5-7.

(责任编辑　闫纯有)