

文章编号:1673-9469(2008)03-0106-04

基于小波有限元的平面问题求解方法

谭德坤^{1,2}, 孙 辉¹, 付雪峰¹

(1.南昌工程学院 计算机系,江西 南昌 330099;2.南昌大学 机电学院,江西 南昌 330075)

摘要:利用 B-样条小波的性质,以小波尺度函数作为插值函数,构造了常用的三角形和矩形小波单元,在此基础上,推导出了利用小波有限元求解平面问题的计算公式,为平面问题的求解提供了一种新的计算方法。数值算例表明,与理论解及商用软件 Ansys 的分析结果相比较,本文构造的小波单元求解方法具有计算精度高,收敛比较快的特点。

关键词:小波有限元;B-样条小波;尺度函数;平面问题

中图分类号: O241;TB115

文献标识码: A

A method of solving plane problems based on B-Spline wavelet finite element

TAN De-kun^{1,2}, SUN Hui¹, FU Xue-feng¹

(1. Department of Computer Science and Technology, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China;

2. College of Mechanical and Electric Engineering, Nanchang University, Nanchang 330075, China)

Abstract: In this paper, wavelet scaling functions are used to construct the triangular and rectangular wavelet element by analyzing the characters of B-spline wavelet. Based on this, the computation expressions for solving the plane problems are presented, which is a new computing method for solving the plane problems. The results obtained in this paper are compared with those by theories and by Ansys, the numerical example illustrate that the wavelet-based element method has better convergence and higher accuracy.

Key words: wavelet finite element; B-spline wavelet; scaling functions; plane problems

小波有限元方法是将传统有限元法与小波分析相结合,是当今工程界研究的热点。该方法利用尺度函数或小波函数代替传统的多项式作为插值函数构造单元,使问题的求解在一个嵌套序列中进行,并利用小波多分辨率的特性,可以获得用于结构分析的多种基函数,从而针对求解问题的精度要求,采用不同的基函数。本文利用小波有限元理论,构造了求解平面问题的小波三角形单元和矩形单元,并编制了利用小波单元求解平面问题的数值计算程序。

1 平面小波单元的构造

由于多项式的微、积分运算简便,而且所有光滑函数的局部都可以用多项式来逼近,所以传统

的有限元法通常都选择多项式作为逼近函数。为了满足收敛性要求,采用多项式作为位移模式时,它的阶次必须包括常数项和线性项。

本文用样条小波尺度函数的组合作为单元位移模式,通过它构造出满足形状函数条件的小波形函数,并在此基础上构造出问题求解的平面小波单元,鉴于问题求解的普遍性,我们仅构造了三结点三角形单元和四结点矩形单元。

1.1 位移插值函数的选择

在实际的数值计算中,一般都采用偶数阶 B 样条小波尺度函数作为插值函数。为了构造出满足形函数条件的单元位移模式,本文采用 0 尺度 2 阶和 4 阶样条小波尺度函数作为插值函数,令 $\phi_m^n(x)$ 表示 m 阶 n 尺度样条小波尺度函数,它们的

收稿日期:2008-06-10

基金项目:国家自然科学基金联合资助重点项目(50539020),江西省 2007 年科技攻关计划项目。

作者简介:谭德坤(1973-),男,重庆开县人,博士研究生,讲师,从事机械、土木工程中的数值计算方法,小波有限元理论。

函数表达式为

$$\phi_2^0(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2-x, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi_4^0(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} x^3, & x \in [0, 1] \\ 4-12x+12x^2-3x^3, & x \in [1, 2] \\ -44+60x-24x^2+3x^3, & x \in [2, 3] \\ 64-48x+12x^2-x^3, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

2阶和4阶小波尺度函数的函数图形如图1和图2所示。其具体性质可参见文献[1]。

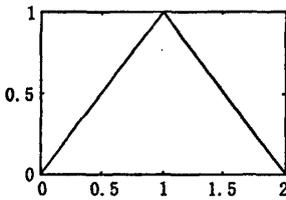


图1 二阶尺度函数

Fig. 1 Second scaling function

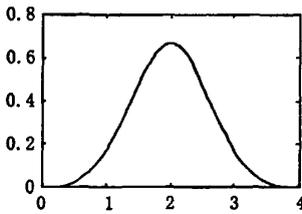


图2 四阶尺度函数

Fig. 2 Forth scaling function

1.2 三结点小波三角形单元的构造

如图3所示的平面三角形单元,引入局部坐标,为了引入小波尺度函数,必须将其压缩至 $[0, 1]$ 区间,即对结点的局部坐标值进行归一化处理。取三角形中最长的一边作为 ξ 轴,垂直于该轴的方向定位 η 轴。在局部坐标下,三角形三个结点1,2,3的局部坐标则分别为 $(0,0)$ 、 $(x_{\xi 2}, 0)$ 和 $(x_{\xi 3}, y_{\eta 3})$ 。对三角形单元进行压缩,压缩公式为

$$x = \frac{x_{\xi}}{x_{\xi 2}}, y = \frac{y_{\eta}}{x_{\xi 3}}$$

由上式进行压缩后,则三角形单元的局部坐标变为 $(0,0)$ 、 $(1,0)$ 和 $(c,1)$,并且 $0 \leq c \leq 1$,式中 c

$$= \frac{x_{\xi 3}}{x_{\xi 2}}$$

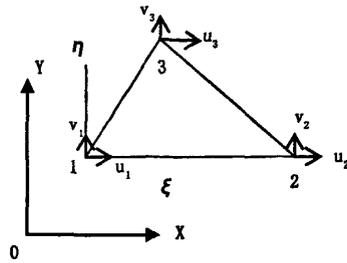


图3 平面三角形单元图

Fig.3 Unit plans of plane triangular

引入小波插值函数,则三结点三角形单元的位移模式可用小波函数表示如下:

$$\begin{aligned} u &= a_1 \phi_4(\xi) \phi_4(\eta+1) + a_2 \phi_4(\xi+1) \phi_4(\eta) + a_3 \phi_4(\xi+1) \phi_4(\eta+1) \\ v &= b_1 \phi_4(\xi) \phi_4(\eta+1) + b_2 \phi_4(\xi+1) \phi_4(\eta) + b_3 \phi_4(\xi+1) \phi_4(\eta+1) \end{aligned}$$

式中 $\phi_4(\xi)$ 为1.1节所述的4阶0尺度样条小波的尺度函数,即前面的 $\phi_4^0(x)$ 。 a_i 及 b_j 为待定系数,可以由单元的结点条件求得。即: $\xi=0, \eta=0, u=u_1, v=v_1; \xi=1, \eta=0, u=u_2, v=v_2; \xi=c, \eta=1, u=u_3, v=v_3$ 。将其带入(4)式中,则可分别求出待定系数 a_i 及 b_j 。又由

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \end{aligned}$$

将待定系数 a_i 及 b_j 带入上式,则可求得小波形函数 N_i ,它们均是局部坐标的函数,即:

$$N_1 = -144 \phi_4(\xi) \phi_4(\eta+1) + \left(\frac{96c^3}{d} - 144\right) \cdot \phi_4(\xi+1) \phi_4(\eta) + 36 \phi_4(\eta+1) \quad (1)$$

$$N_2 = 36 \phi_4(\xi) \phi_4(\eta+1) - \frac{24c^3}{d} \cdot \phi_4(\xi+1) \phi_4(\eta) \quad (2)$$

$$N_3 = \frac{6}{d} \phi_4(\xi+1) \phi_4(\eta) \quad (3)$$

其中 $d = \phi_4(c+1)$,由此可求得三结点小波三角形单元的位移场

$$\vec{u} = \vec{N} \vec{q}^e$$

式中 \vec{u} -单元位移场; \vec{N} -形函数矩阵; \vec{q}^e -单元结点位移列阵。

1.3 四结点小波矩形单元的构造

平面4结点矩形单元如图4所示。取单元形心为局部坐标的原点,单元的结点位移共有8个

自由度, 结点编号为 1, 2, 3, 4, 单元的广义坐标数应取 8。设单元的形心位置是 (x_0, y_0) , 整体坐标与局部坐标的转换关系为

$$x = x_0 + a\xi, \xi = \frac{x - x_0}{a},$$

$$y = y_0 + b\eta, \eta = \frac{y - y_0}{b}$$

在单元中, 各点的局部坐标 $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$ 。单元的四条边分别是 $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$ 。

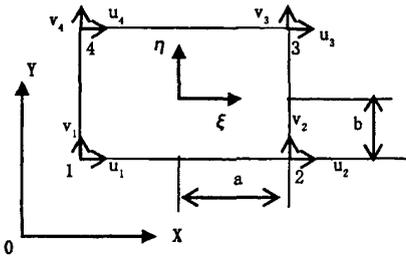


图4 平面4结点矩形单元图
Fig.4 Rectangle unite plans of four crunodes

考虑到结点的个数, 4 结点矩形单元的位移模式可以用小波函数表示为

$$u = a_1 \phi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + a_2 \phi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \times \phi_2\left(\frac{\eta+3}{2}\right) + a_3 \phi_2\left(\frac{\xi+3}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + a_4 \phi_2\left(\frac{\xi+3}{2}\right) \times \phi_2\left(\frac{\eta+3}{2}\right) \quad (4)$$

$$v = b_1 \phi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + b_2 \phi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \times \phi_2\left(\frac{\eta+3}{2}\right) + b_3 \phi_2\left(\frac{\xi+3}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+1}{2}\right) + b_4 \phi_2\left(\frac{\xi+3}{2}\right) \times \phi_2\left(\frac{\eta+3}{2}\right) \quad (5)$$

式中 $\phi_2(\xi)$ 为 2 阶样条小波的尺度函数, a_i 及 b_j 为 8 个待定系数, 它们可由单元的结点条件求出。即: $\xi = -1, \eta = -1, u = u_1, v = v_1; \xi = 1, \eta = -1, u = u_2, v = v_2; \xi = 1, \eta = 1, u = u_3, v = v_3; \xi = -1, \eta = 1, u = u_4, v = v_4$ 。将其带入式(4)、式(5), 则可求得 8 个待定系数 $a_1 \cdots a_4$ 及 $b_1 \cdots b_4$, 再将此系数带入下式

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

则可求得小波函数 N_i , 它们都是局部坐标的函数, 由上述可得

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \phi_2\left(\frac{\xi+3}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+3}{2}\right) \\ N_2 &= \phi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+3}{2}\right) \\ N_3 &= \phi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+1}{2}\right) \\ N_4 &= \phi_2\left(\frac{\xi+3}{2}\right) \phi_2\left(\frac{\eta+1}{2}\right) \end{aligned} \right\}$$

由此可求得四结点小波矩形单元的位移场

$$\bar{u} = \bar{N} \bar{q}^e$$

其中 $q^e = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T$

$$N = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$$

上式中 I 为单位矩阵, \bar{u} 为单元位移场, \bar{N} 为形函数矩阵, \bar{q}^e 为单元结点位移列阵。

2 平面问题的小波有限元求解方法

在第一节中, 单元位移场用小波形函数表示为

$$\bar{u} = \bar{N} \bar{q}^e$$

由弹性力学平面问题的几何方程, 则单元应变场表示为

$$\bar{\epsilon} = [\partial] \bar{u} = [\partial] \bar{N} \bar{q}^e = \bar{B} \cdot \bar{q}^e$$

而 \bar{B} 为几何函数矩阵。

由物理方程, 单元应力场为

$$\bar{\sigma} = \bar{D} \bar{\epsilon} = \bar{S} \cdot \bar{q}^e$$

其中 \bar{S} 为应力函数矩阵, $\bar{S} = \bar{D} \cdot \bar{B}$ 。

在具体计算过程中, 由于形函数 N_i 是由局部(自然)坐标 (ξ, η) 表示的, 我们必须将其向整体坐标 (x, y) 转换。具体转换公式可参见文献[2]。由最小势能原理, 则可得单元的刚度方程

$$\bar{k}^e \bar{q}^e = \bar{p}^e$$

式中 \bar{k}^e 为单元刚度矩阵, \bar{p}^e 为结点载荷列阵, 其求解同传统的有限单元法。单元刚度矩阵为

$$\bar{k}^e = \int \int_{\Delta} [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (6)$$

对三角形单元, \bar{k}^e 的分块矩阵如(7)式所示, 矩形单元类似, 只是矩阵大小不同。

$$\bar{k}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (7)$$

而子矩阵为

$$[k_{ij}] = \int \int_{\Delta} \bar{B}_i^T \bar{D} \bar{B}_j t |J| d\xi d\eta$$

这里, t 为单元厚度, J 为雅克比矩阵, $|J|$ 为

雅克比矩阵的行列式。而几何矩阵 \bar{B} 的某个子矩阵的表达式为

$$[\bar{B}_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

这里, N_i 为公式(1~3)所求得的形函数。在计算单元矩阵 \bar{k}_e 的过程中,由于公式(6)非常复杂,本文采用三点高斯积分进行积分运算。二维高斯积分公式为

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j F(\xi_j, \eta_j)$$

式中 H_i, H_j - 权系数; $F(\xi, \eta)$ - 积分函数。

经过上述公式计算,便可求得平面问题的小波有限元解。

3 数值算例

根据前面所推导的小波有限元求解方法,为了验证该方法的正确性与有效性,作者对经典的平面应力求解问题之一——带孔平板应力分析模型,利用上述方法,在 Visual Fortran6.0 平台下编制了小波有限元计算程序进行求解验证,并将其计算结果与 Ansys 平台下的计算结果进行了对比研究。计算过程介绍如下:

带孔平板应力分析模型如图 5 所示,其求解条件为:

几何参数: $F = 20\text{N/mm}$, 长 $L = 200\text{mm}$, 宽 $b = 100\text{mm}$, 圆孔半径 $r = 20\text{mm}$, 圆心坐标为 $(100, 50)$, 弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 板厚 $t = 20\text{mm}$ 。

约束条件:板的左端固定。

载荷:板的右侧边缘承受均匀拉力,载荷大小为 20N/mm 。

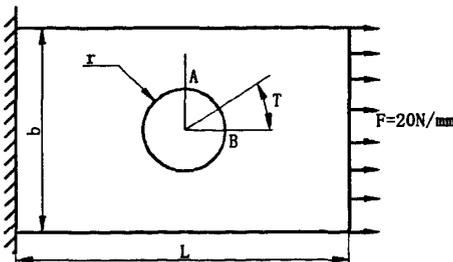


图5 带孔平板模型

Fig. 5 The model of flat with bore

采用 Ansys 的 8 结点平面矩形单元(Plane82)及 6 结点三角形单元(Plane2)进行自由网格剖分,单元边长取 20mm 。网格剖分完毕,对左侧施加约束,对右侧面运用 Ansys 中的 Pressure 选项加载,由于物体表面内法线方向为正,故载荷密度值为 -1MPa ,加载完毕后对模型进行计算。由弹性力学的齐尔西解答,我们知道,无限大带圆孔板的最大应力集中系数为 3,并随着圆孔半径与板宽比值的增大而增大;最大应力出现在圆孔的最顶端和最下端,对于本题,其解析解由文献[3]可知,大小为 3.9MPa 。由于结点应力求解数据太多,本文不一列出,仅考察特征点 A 的应力 σ_{\max} ,即沿着 y 轴的回向正应力,其 Ansys 求解结果与小波有限元计算结果如表 1 所示。

表 1 A 点的孔边应力数值 σ_{\max} (单位:MPa)

Tab. 1 The σ_{\max} value of point A

求解单元	σ_{\max}	误差	解析解
Plane2 单元	3.3084	15.2%	$\sigma_{\max} = 3.9$
小波三角形单元	3.7213	4.6%	
Plane82 单元	3.7780	3.1%	
小波矩形单元	3.8807	0.5%	

由表中数据可见,在相同的网格划分密度下,小波有限元解均优于 Ansys 计算结果,即在网格不变的情况下,小波有限元解能迅速逼近问题的真解。

4 结论

1) 本文利用 B 样条小波尺度函数代替传统的有限元多项式插值,建立了新的逼近空间,构造了用于求解弹性力学平面问题的 B 样条小波三角形和矩形单元。B 样条小波单元同时具有传统有限元和 B 样条函数数值逼近精度高收敛比较快的特点。

2) 由于 B 样条小波函数的变尺度、紧支撑等优良特性,B 样条小波有限元在处理奇异性、大梯度问题具有一定的优势。因此该方法在建筑、水利、机械、土木工程等领域将有一定的应用前景。

参考文献:

[1] 何正嘉,陈雪峰.小波有限元理论及其工程应用[M].北京:科学出版社,2006.
 [2] 朱伯芳.有限单元法原理与应用(第二版)[M].北京:中国水利水电出版社,1998. (下转第 112 页)

P_i 无非零最大外权属性, 则 P_i 是约简, 停止搜索并输出结果; 否则, 令 $i+1=i$ 返回步骤 4。

因为 A 中仅含有有限种属性, 所以一定存在自然数 K , 使得 P_K 是 A 的一个约简。

2.3 算法讨论

因为每次从 $A - P_i$ 中选择关于 P_{i-1} 的最大外权属性 a_i 并入 P_{i-1} , $P_i = P_{i-1} + \{a_i\}$ ($i \geq 1$), 不管 a_i 最终是否被保留在约简中, 一个不变的事实是: 作为选择范围的 $A - P_i$ 每次都减少了一种属性。所以, 算法复杂度是多项式的。

上述算法虽然避开了 NP 问题, 并且能够找到一个 Pawlak 约简, 却无法保证得到的是最小约简, 只能是一个满意约简。

3 结束语

给定信息表达系统 $S = (U, A, V, f)$ 后, A 的核及 A 的所有约简都已客观存在, 问题是采用怎样的算法, 才能以尽可能少的计算量求出约简。本文定义一种外权重, 并以此为启发性知识构造一种寻求约简的搜索算法。计算复杂度是多项式的, 收敛速度快; 不足是无法保证求出的是最小约简。

值得注意的是: 粗集是一个特殊的系统, 粗集中定义的任何一种属性权重都是特定条件下的属性权重。因为粗集与非粗集系统关于分类有完全不同的规则, 它与非粗集系统的任何一种属性权重都有不同的内容、不同的算法和不同的应用。或说粗集中的属性权重不能应用于非粗集系统; 非粗集系统的任何一种属性权重都不能用粗集算法获得。

参考文献:

- [1] PAWLAK Z. Rough sets - theoretical aspects of reasoning about data [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [2] 刘清. Rough 集及 Rough 推理[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [3] 王国胤. Rough 集理论与知识获取[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
- [4] 苗夺谦, 胡桂荣. 知识约简的一种启发式算法[J]. 计算机研究和发展, 1999, 36(6), 681 - 684.
- [5] 星学华, 安静. 基于粗集证据理论的指挥机构指挥能力的评估[J]. 科技信息, 2007, (2): 13 - 14.
- [6] 曾黄麟. 粗集理论及其应用—关于数据推理的新方法[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1998.
- [7] 王宏开, 姚炳学, 胡海清. 基于粗集理论的权重确定方法[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(6): 21 - 22.

(责任编辑 闫纯有)

(上接第 109 页)

- [3] 张涛, 刘土光. 开孔有限板的孔边应力场分析[J]. 华中科技大学学报, 1993, 30(1): 87 - 89.
- [4] 黄义, 韩建刚. 薄板小波有限元理论及其应用[J]. 计算力学学报, 2006, 23(1): 76 - 80.
- [5] 杜守军, 夏亨熹. 二次 B 样条平面单元[J]. 河北农业大学学报, 2002, 25(4): 143 - 148.
- [6] CHEN W H, WU C W. Adaptable spline element for mem-

brane vibration analysis[J]. Int. J. for Numerical Methods in England, 1996, 39: 2457 - 2476.

- [7] KO J, KURDILA A J. A class of finite element methods based on orthonormal compactly supported wavelets [J]. Computational Mechanics, 1995, (16): 235 - 244.
- [8] INGRID DAUBECHIES. 小波十讲[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.

(责任编辑 刘存英)

基于小波有限元的平面问题求解方法

作者: [谭德坤](#), [孙辉](#), [付雪峰](#), [TAN De-kun](#), [SUN Hui](#), [FU Xue-feng](#)
作者单位: [谭德坤, TAN De-kun\(南昌工程学院, 计算机系, 江西, 南昌, 330099; 南昌大学, 机电学院, 江西, 南昌, 330075\)](#), [孙辉, 付雪峰, SUN Hui, FU Xue-feng\(南昌工程学院, 计算机系, 江西, 南昌, 330099\)](#)
刊名: [河北工程大学学报\(自然科学版\)](#) 
英文刊名: [JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING \(NATURAL SCIENCE EDITION\)](#)
年, 卷(期): 2008, 25 (3)
被引用次数: 2次

参考文献(8条)

1. [何正嘉;陈雪峰](#) [小波有限元理论及其工程应用](#) 2006
2. [朱伯芳](#) [有限单元法原理与应用](#) 1998
3. [张涛;刘士光](#) [开孔有限板的孔边应力场分析](#)[期刊论文]-[华中科技大学学报\(自然科学版\)](#) 1993(01)
4. [黄义;韩建刚](#) [薄板小波有限元理论及其应用](#)[期刊论文]-[计算力学学报](#) 2006(01)
5. [杜守军;夏亨熹](#) [二次B样条平面单元](#)[期刊论文]-[河北农业大学学报](#) 2002(04)
6. [CHEN W H;WU C W](#) [Adaptable spline element for membrane vibration analysis](#) 1996
7. [KO J;KURDILA A J](#) [A class of finite element methods based on orthonormal compactly supported wavelets](#)[外文期刊] 1995(16)
8. [INGRID DAUBECHIES](#) [小波十讲](#) 2004

引证文献(3条)

1. [袁易君](#) [电子信息科学中小波分析的研究](#)[期刊论文]-[现代企业文化](#) 2008(33)
2. [刘艳红](#). [商中新](#) [区间B样条小波杂交应力元分析及其应用](#)[期刊论文]-[中国民航大学学报](#) 2013(2)
3. [谭德坤](#). [赵嘉](#). [孙辉](#) [Daubechies小波伽辽金法及其工程应用](#)[期刊论文]-[煤矿机械](#) 2010(4)

本文链接: http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_hbjzkjxyxb200803030.aspx