

文章编号:1673-9468(2008)04-0017-03

## 钢筋混凝土结构材料非线性分析的 QR 法

王继兵<sup>1</sup>, 梁建功<sup>2</sup>, 秦 荣<sup>3</sup>

(1. 同济大学土木工程学院, 上海 200092; 2. 郑州市公路工程公司, 河南 郑州 450052;

3. 广西大学土木建筑工程学院, 广西南宁 530004)

**摘要:** QR 法是一种新的数值分析方法, 利用 QR 法基本原理构造了结构分析的位移函数; 并选择了合适的材料本构模型, 将 QR 法引入钢筋混凝土结构的非线性分析中, 编制了 QR 法计算程序。算例分析表明, QR 法计算精度满足工程要求, 是一种经济可靠的实用分析方法。

**关键词:** 数值方法; 非线性分析; QR 法

**中图分类号:** TU311

**文献标识码:** A

### QR method for material nonlinear analysis of reinforced concrete

WANG Ji-bing<sup>1</sup>, LIANG Jian-gong<sup>2</sup>, QIN Rong<sup>3</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Zhengzhou

Company of Highway Engineering, Zhengzhou 450052, China; 3. Department of Architecture

and Civil Engineering, Guang Xi University, Nanning, 530004, China)

**Abstract:** QR method is a new numerical method. The structural displacement function is deduced by according to the principles of QR method. And the proper material constitutive model is selected. QR method is introduced to the nonlinear analysis of reinforced concrete. The analysis program is designed by QR method. Some examples show that QR method is an economic and reliable analysis method.

**Key words:** numerical method; nonlinear analysis; QR method

有限元法和边界元法是目前广泛应用的数值分析方法, 有限元法在处理一些大型复杂结构的非线性问题时, 未知量的数目太多, 计算效率不高; 边界元法在处理复杂非线性问题、多介质问题及模拟施工过程方面有所缺陷, 从而限制了它在工程数值分析中的应用。为此国内外学者提出了很多简化实用的分析方法, 如无网格法、QR 法。本文在前人研究的基础上, 把 QR 法引入钢筋混凝土结构的材料非线性分析中, 利用样条函数和正交多项式来构造位移模式, 并依此编制了计算程序。

### 1 结构分析的 QR 法

QR 法<sup>[1]</sup>是将 B 样条函数与正交函数结合起来, 建立整个结构子域的位移函数, 它是以变分原理和最小势能原理推出的一种新计算格式。

#### 1.1 构造位移函数

如图 1 所示, 如果对结构沿 x 方向进行样条离散, 则结构位移函数可采用式(1)来构造。

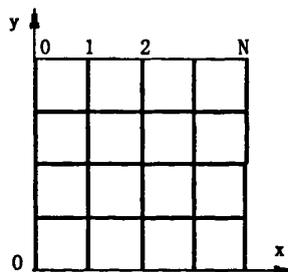


图1 样条离散  
Fig.1 Spline partitions

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^n [\varphi] \{u\}_m X_m(y) \\ v &= \sum_{m=1}^n [\varphi] \{v\}_m Y_m(y) \\ \theta &= \sum_{m=1}^n [\varphi] \{\theta\}_m \Theta_m(y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $[\varphi] = [\phi_0 \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_N]$ , 其中  $\phi_i(x)$  为满足拟和变形而构造的样条基函数,  $X_m, Y_m, \Theta_m$  为满足边界条件的正交函数或正交多项式。

式(1)中的3项位移在不同的结构分析中可做相应的扩充或删减, 本文用式(2)和式(3)来构造位移函数。

$$\left. \begin{aligned} X_m(y) &= \sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \times \\ & \frac{(m+n)!}{(m-n)! (n+1)! (n-1)!} \left(\frac{y}{H}\right)^n \\ X_m &= Y_m = \Theta_m \\ \phi_i(x) &= \frac{10}{3} \varphi_3\left(\frac{x}{h} - i\right) - \frac{4}{3} \varphi_3\left(\frac{x}{h} - i + \frac{1}{2}\right) - \\ & \frac{4}{3} \varphi_3\left(\frac{x}{h} - i - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} \varphi_3\left(\frac{x}{h} - i + 1\right) + \\ & \frac{1}{6} \varphi_3\left(\frac{x}{h} - i - 1\right) \quad i=0, 1, \cdots, N \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由式(1)可得

$$V = [N] \{V\} \quad (4)$$

式(4)中

$$\left. \begin{aligned} V &= [U \quad V \quad \theta] \\ \{V\} &= [\{V\}_0^T \quad \{V\}_1^T \quad \cdots \quad \{V\}_N^T]^T \\ [N] &= [[N]_0 \quad [N]_1 \quad \cdots \quad [N]_N] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(5)中

$$\left. \begin{aligned} \{V\}_i &= [V_{i1}^T \quad V_{i2}^T \quad \cdots \quad V_{in}^T]^T \\ [V]_i &= [N_{i1} \quad N_{i2} \quad \cdots \quad N_{in}] \\ V_{im} &= [u_{im} \quad v_{im} \quad \theta_{im}]^T \\ N_{im} &= \varphi_i(x) \text{diag}(X_m(y), Y_m(y), \Theta_m(y)) \end{aligned} \right\}$$

### 1.2 建立 $\{V\}_e$ 与 $\{V\}$ 的转化关系

结构单元结点位移向量  $\{V\}_e$  与整个结构划分的样条结点位移向量  $\{V\}$  的转化关系为

$$\{V\}_e = [T] [N]_e \{V\} \quad (6)$$

式中  $\{V\}_e$ —单元结点位移向量;  $\{V\}$ —样条结点位移向量;  $[N]_e = [[N]_1^T [N]_2^T \cdots [N]_m^T]^T$ —单元形函数矩阵;  $m$ —单元的结点数;  $[T]$ —单元坐标转换矩阵, 随单元结点数增加而扩张。

### 1.3 建立结构样条离散化总势能泛函

如果把结构分为  $M$  个计算单元, 则每一个单

元的总势能泛函可表示为

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{V\}_e^T [k]_e \{V\}_e - \{V\}_e^T (\{f\}_e + \{p\}_e) \quad (7)$$

式中  $\{V\}_e$ —单元位移列阵;  $[k]_e$ —单元刚度矩阵;  $\{f\}_e$ —单元荷载列阵;  $\{p\}_e$ —塑性变形引起的单元附加荷载列阵, 各列阵的确定和有限元法相同。

将式(6)代入上式可得

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{V\}^T [G]_e \{V\} - \{V\}^T [F]_e \quad (8)$$

式中  $[G]_e = [N]_e^T [T]^T [k]_e [T] [N]_e$ ;

$[F]_e = [N]_e^T [T]^T (\{f\}_e + \{p\}_e)$

则结构总的势能泛函为

$$\Pi = \frac{1}{2} \{V\}^T [G] \{V\} - \{V\}^T [F] \quad (9)$$

利用变分原理可得结构方程

$$[G] \{V\} = [F] \quad (10)$$

其中  $[G] = \sum_{e=1}^M [G]_e$ ,  $[F] = \sum_{e=1}^M [F]_e$

## 2 材料本构关系及单元处理

### 2.1 材料本构关系

假定在线弹性阶段, 混凝土为各向同性体; 在非弹性阶段, 为正交各向异性体, 在各级荷载增量内应力应变为线弹性关系。混凝土材料: 采用 Darwin - Pecknold 增量模型<sup>[2]</sup>, Kupfer 屈服准则<sup>[3]</sup>, 强化条件按等向强化理论考虑; 本构模型: 受压状态(包括双向受压及拉压应力状态的受压)采用 Hongnestad 模型<sup>[4]</sup>, 对于受拉应力状态(包括双向受拉及拉压应力状态的受拉), 开裂前混凝土看作线弹性材料, 采用 Kupfer 屈服准则判断开裂情况; 钢筋采用理想弹塑性模型, 在混凝土中用分布模式来模拟, 忽略其横向抗剪能力, 则钢筋混凝土组合单元物理矩阵为

$$[D] = [D_c] + \sum_{i=1}^n \rho_i [D_i] \quad (11)$$

式中  $\rho_i$ —某组钢筋的含筋率;  $n$ —钢筋组数;  $[D_i]$ —经过坐标转化后的等效分布钢筋的物理矩阵;  $[D_c]$ —混凝土应力应变矩阵。

### 2.2 过渡单元处理

在每级加载中, 加载前为弹性, 加载后为塑性的单元, 称为过渡单元。这种单元用加权平均弹塑性矩阵来计算。

$$[\bar{D}]_{\varphi} = m[D]_e + (1 - m)[D]_{\varphi} \quad (12)$$

式中  $[D]_e$ —单元弹性状态物理矩阵;  $[D]_{\varphi}$ —单元塑性状态物理矩阵;  $m$ —比例因子具体计算见文献[5]。

### 2.3 单元不平衡应力 QR 法处理

采用片状裂缝模型来模拟混凝土开裂,如果单向开裂,由于裂缝表面的骨料咬合、磨擦作用,开裂面尚可承受部分剪力,但需考虑残留抗剪系数  $\beta$ ;混凝土单元开裂、破坏后,采用文献[6]的方法进行应力调整。设开裂、破坏后的单元经过调整后的不平衡应力为  $\{\sigma\}_{\alpha}$ ,在计算中需要转化为为单元的不平衡结点荷载  $[F]_{\alpha}$ ,QR 法计算中可经过如下转化后叠加到下一荷载增量中。

$$\begin{cases} [f]_{\alpha} = [B]^T \{\sigma\}_{\alpha} dw \\ [F]_{\alpha} = [N]^T [T]^T [f]_{\alpha} \end{cases} \quad (13)$$

式中  $[N]_e = [[N]_1^T [N]_2^T \dots [N]_m^T]^T$ —单元形函数矩阵;  $[T]$ —单元坐标转换矩阵。

### 3 算例分析

如图 2 为一片钢筋混凝土墙,厚 0.3m,混凝土弹性模量  $E_0 = 3.0 \times 10^4 \text{ MPa}$ ;设峰值应力对应割线模量  $E_s = E_0/4$ ;泊松比 0.2;抗压强度  $f_c = 20 \text{ MPa}$ ;单轴抗拉强度  $f_t = 2.0 \text{ MPa}$ ;钢筋设为理想弹塑性材料,弹性模量  $E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ;泊松比 0.3;屈服强度  $f_y = 360 \text{ MPa}$ ;配筋率为  $\rho_x = \rho_y = 0.5\%$ ;顶点作用水平方向集中荷载  $p = 1.0 \times 10^6 \text{ N}$ ,分 10 个等级加载,分析其非线性特性。

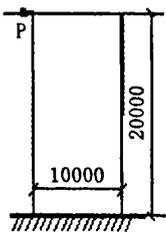


图2 墙体结构

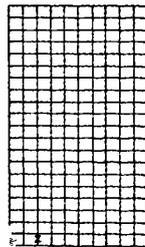


图3 结构单元划分

Fig.2 Wall structure Fig.3 Element mesh of the

基于以上分析原理,用 C 编制了钢筋混凝土非线性分析 QR 法程序。荷载加载模式为逐级加载,采用增量初应力法迭代格式求解。单元划分如图 3

所示,取墙体左侧顶点水平位移作为比较对象,其荷载-位移关系曲线的三种解如图 4 所示。

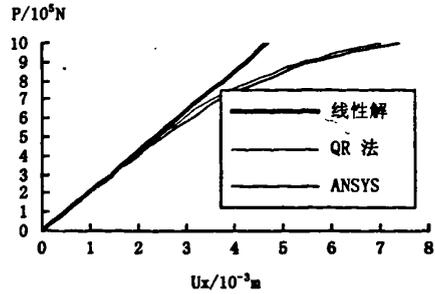


图4 荷载-位移关系曲线

Fig.4 The curve of load-displacement

从图 4 可以发现前四级加载过程中非线性解和线性解基本重合,第四级荷载出现过渡单元,到第五级荷载结构线性解和非线性解出现明显的差异,本文方法和 ANSYS 的计算结果也出现差异,但总体变化趋势基本一样。

### 4 结论

1) 本文将 QR 法引入钢筋混凝土结构非线性分析中,通过和 ANSYS 的结果进行对比分析,证明了 QR 法的正确性。

2) 由于 QR 法和有限元法分析的原理不同,在非线性阶段有些许偏离。但总体变化趋势一致,差异不大。基于本文理论编制的程序在数据处理及运算时间等方面比有限元法有一定的优势。

### 参考文献:

- [1] 秦荣.工程结构非线性[M].北京:科学出版社,2006.
- [2] 张新培.钢筋混凝土抗震结构非线性反应分析[M].北京:科学出版社,2003.
- [3] KUPFER H, GERSTLE K. Behaviour of concrete under biaxial stress[J]. Journal of Engng. Mech. Div. ASCE, 1973, 99: 44.
- [4] 江见鲸.混凝土结构有限元分析[M].北京:清华大学出版社,2005.
- [5] 康清梁.钢筋混凝土有限元分析[M].北京:中国水利水电出版社,1996.
- [6] 王连广.钢与混凝土组合结构理论与计算[M].北京:科学出版社,2005.

(责任编辑 刘存英)