

文章编号:1673-9468(2008)04-0020-05

## 考虑弯曲刚度的斜拉索固有振动特性分析

高永强<sup>1</sup>,王秀红<sup>2</sup>

(1.石家庄铁道学院 中铁公司,河北 石家庄 050043;2.石家庄铁道学院 四方分院,河北 石家庄 050043)

**摘要:**考虑拉索垂度、弯曲刚度及几何非线性的影响,建立了斜拉桥拉索固有振动的非线性振动方程。用奇异摄动法(L-P)和谐波平衡法(傅立叶级数)对典型斜拉索进行了数值求解。结果表明,拉索的固有频率与初始索力、索垂度、弯曲刚度、倾角有关,初始索力的影响最大。

**关键词:**弯曲刚度;拉索;振动特性

**中图分类号:** TU3

**文献标识码:** A

### Natural vibration character analysis of inclined cable considering bending rigidity

GAO Yong-qiang<sup>1</sup>, WANG Xiu-hong<sup>2</sup>

(1. Zhongtie Company, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China;

2. Sifang College, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang 050043, China)

**Abstract:** The non-linear equations of motion, in which the static sag, bending rigidity as well as the geometric non-linearity is considered, are promoted. Several numeric examples of typical inclined cables are prosecuted by using L-P method and harmonic probing method. The results demonstrate that the frequency is related to the original force, the sag of cable, bending rigidity, inclined angle and the influence of original force is the obviousest.

**Key words:** bending rigidity; inclined cable; vibration character

拉索是斜拉桥的主要受力构件,因它的轻、柔和低阻尼等特点,在风、地震、车辆等荷载作用下,各种振动问题很容易发生。随着斜拉桥跨度的不断增大,拉索的振动问题越来越引起研究者的重视。各种因素引起的拉索振动而导致设备破坏、交通被迫中断的事例频频发生。1988年,比利时 Ben-Ahin 桥和 Wandre 桥在风荷载作用下,其中 9 根索发生了振幅 1m 以上的大幅振动<sup>[1]</sup>,荷兰的 Erasmus 桥在开通不到两个月便由于索的大幅振动和桥面的明显振动而被迫关闭<sup>[2]</sup>。因此,研究斜拉索的非线性振动具有实际工程意义。通常对斜拉索的振动研究一般多是作为线性问题来处理,但由于斜拉索的振动是大幅振动,因此把斜拉索的大幅振动按非线性问题来处理更符合实际情况。常用的求解非线性振动的近似解析方法有基本摄动法、奇异摄动法(L-P法)、谐波平衡法、平

均法和渐进法、多尺度法等<sup>[3]</sup>,本文在考虑斜拉索静平衡时索曲线的基础上,利用 L-P 法把解和频率全部展开,同时采用谐波平衡法求解斜拉索的非线性固有振动,这样可以克服常规 L-P 法需要解微分方程和依靠消除长期项建立补充方程的弊病,同时又克服了常规 L-P 法不便于求高阶近似解的缺陷。本文还通过实例讨论分析了索弯曲刚度、拉力、倾角、振幅等因素对斜拉索非线性固有振动特性的影响,并根据有限元计算验证了理论的正确性。

### 1 非线性动力方程

对于图 1 所示的斜拉索,设在静平衡状态下索的张力为  $T_s$ ,可以得到斜拉索在静平衡时的静力挠曲线微分方程

收稿日期:2008-10-08

基金项目:河北省自然科学基金资助项目(E200600389)

作者简介:高永强(1978-),男,河南许昌人,工程师,工学硕士,从事结构健康诊断的研究。

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + \frac{mg}{T_s} \sqrt{1 + \left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2} = 0 \quad (1)$$

式中  $y_0(x)$ —索静平衡时挠曲线; $m$ —索的单位长度质量。

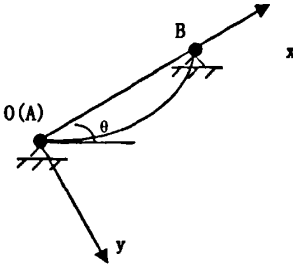


图1 斜拉索静力示意图

Fig.1 Static force sketch map of inclined cable

由图 1 可知索平衡时的边界条件为  $x = 0, y_0 = 0; x = l, y_0 = 0$  (2)

考虑到在静平衡时,索的垂度很小,  $(\frac{dy_0}{dx})^2$  为微量可以忽略不计,利用式(1)、式(2)可以求得索平衡时的挠曲线为

$$y_0(x) = \frac{mg}{2T_s} (lx - x^2) \quad (\text{抛物线解}) \quad (3)$$

若考虑斜拉索的弯曲刚度时,并考虑静力平衡及小垂度,由振动理论可以得到斜拉索在静平衡时发生振动的非线性固有振动微分方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - T_d \frac{\partial^2 (y + y_0)}{\partial x^2} - T_s \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{不考虑阻尼}) \quad (4)$$

式中  $T_s$ —静张力; $T_d$ —动张力。

由变形前和变形后索伸长量求出  $\delta(t)$

$$\delta(t) = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial (y(x,t) + y_0(x))}{\partial x}\right)^2} dx - l \quad (5)$$

和索长相比,拉索的横向位移  $y(x,t)$  要小得多,  $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$  要远小于 1, 另外对于一般索  $(\frac{\partial y_0(x)}{\partial x})^2 \ll (\frac{\partial y(x,t)}{\partial x})^2$  可以忽略, 根据二项式定理展开,(5)式可近似为下面公式

$$\delta(t) \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \times \frac{\partial y_0(x)}{\partial x} \right] dx \quad (6)$$

$$\text{动张力 } T_d = \frac{EA_0}{2l} \int_0^l \left[ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y_0}{\partial x} \right] dx \quad (7)$$

式中  $E_l$ —索的弯曲刚度; $EA_0$ —拉伸刚度; $y(x,$

$t)$ —索的横振位移。

## 2 模型的建立与分析

### 2.1 张紧弦

从斜拉索静力分析可知,若斜拉桥中的拉索垂跨比较小时,例如长度较小的拉索,其中点垂度很小,张力沿索长的变化亦很小,即由拉索垂度引起的几何非线性效应不明显。因此可以先不考虑拉索的垂度效应,将拉索模拟成张紧弦,建立一个简单的力学模型来表征拉索固有振动特性。并且满足下面几条基本假定:

- 1) 不考虑拉索张力沿弦长方向的变化。
- 2) 不考虑拉索的重力垂度影响。
- 3) 不考虑拉索的抗弯刚度、抗剪刚度及抗扭刚度。
- 4) 索在振动过程中处于线弹性范围。
- 5) 不考虑动张力  $T_d$ 。

根据以上假定(4)式简化为

$$-T_s \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

考虑到拉索的固有振动特性,可设  $y(x,t) =$

$\sum_{i=1}^n A_i(t) \sin(ix/l)$ , 其中,  $\sin(ix/l)$  为拉索的第  $i$  阶模态的阵型函数,  $A_i(t)$  为相应振幅的广义坐标。所以(8)式变为

$$T_s \frac{\pi^2}{l^2} \sum_{i=1}^n i^2 A_i(t) \sin(ix/l) + m \sum_{i=1}^n \ddot{A}_i(t) \sin(ix/l) = 0 \quad (9)$$

$$m \ddot{A}_i(t) + T_s \frac{\pi^2}{l^2} i^2 A_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (10)$$

求解方程(10),可以得到各阶圆频率

$$\omega_i^2 = \frac{i^2 \pi^2 T_s}{l^2 m} \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

$\omega_i$  为拉索简化为张紧弦时的第  $i$  阶圆频率。

### 2.2 不考虑弯曲刚度的非线性分析

基本假定:(1) 不考虑拉索的抗弯刚度、抗剪刚度及抗扭刚度。(2) 索在振动过程中处于线弹性范围。

采用傅立叶级数法研究求解了斜拉索的非线性固有振动,这样可以克服常规 L-P 法需要解微分方程和依靠消除长期项建立补充方程的弊病,同时又克服了常规 L-P 法不便于求高阶近似解的缺陷(同时也可以采用多尺度法求解)。

考虑斜拉索的重力垂度及张力在索内分部不均匀时,(4)式方程变为

$$-Td \frac{\partial^2(y+y_0)}{\partial x^2} - T_s \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

考虑到拉索的固有振动,可设  $y(x,t) = Y(x) \cdot A(t)$ ,利用伽辽金原理可以得到

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_0^2 A + \alpha A^2 + \beta A^3 = 0 \quad (12)$$

$$\omega_0^2 = -\frac{EA_0}{l} \left[ \int_0^l \left( \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{d^2 y_0}{dx^2} \cdot Y + T_s \cdot Y \cdot \frac{d^2 Y}{dx^2} \right) dx \right] / \left( \int_0^l m \cdot Y^2 dx \right)$$

$$\alpha = \left[ -\frac{EA_0}{2l} \left( \int_0^l \left( \frac{dY}{dx} \right)^2 \cdot \frac{d^2 y_0}{dx^2} \cdot Y dx + 2 \int_0^l \frac{dY}{dx} \cdot \frac{d^2 Y}{dx^2} \cdot Y dx \right) \right] / \left( \int_0^l m \cdot Y^2 dx \right)$$

$$\beta = \left[ -\frac{EA_0}{2l} \int_0^l \frac{d^2 Y}{dx^2} \cdot Y \cdot \left( \frac{dY}{dx} \right)^2 dx \right] / \left( m \int_0^l Y^2 dx \right)$$

为了避免L-P法求解出现的长期项和不宜进行高次求解的弊端,下面采用傅立叶级数法研究斜拉索非线性固有振动方程式(11)的解。

设  $\tau = \omega t, A = \varepsilon \varphi, |\varphi| < \infty, 0 < \varepsilon \ll 1$  利用式(12)可把式(11)转化为

$$\omega^2 \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \omega_0^2 \varphi + \varepsilon \alpha \varphi^2 + \varepsilon^2 \beta \varphi^3 = 0 \quad (13)$$

设式(13)对应的初始条件为  $\varphi(0) = c, \frac{d\varphi(0)}{d\tau} = 0$ 。

根据奇异摄动法(L-P)的基本思想,把方程的解和振动频率均展开为  $\varepsilon$  的幂级数。

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \varepsilon^3 \varphi_3 + \dots \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots \end{cases} \quad (14)$$

利用式(14)可把初始条件化为

$$\varphi_0(0) = c, \frac{d\varphi_0(0)}{d\tau} = 0 \quad (15)$$

$$\varphi_i(0) = \frac{d\varphi_i(0)}{d\tau} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

把式(14)代入式(13),合并  $\varepsilon$  的同阶幂项得到如下方程组

$$\omega_0^2 \frac{d^2 \varphi_0}{d\tau^2} + \omega_0^2 \varphi_0 = 0 \quad (\varepsilon \text{ 的 } 0 \text{ 次幂项}) \quad (16)$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} + \omega_0^2 \varphi_1 = -2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 \varphi_0}{d\tau^2} - \alpha \varphi_0^2 \quad (\varepsilon \text{ 的 } 1 \text{ 次幂项}) \quad (17)$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 \varphi_2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \varphi_2 = -2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} - 2\omega_0 \omega_2 +$$

$$\omega_1^2 \frac{d^2 \varphi_0}{d\tau^2} - 2\alpha \varphi_0 \varphi_1 - \beta \varphi_0^3 \quad (\varepsilon \text{ 的 } 2 \text{ 次幂项}) \quad (18)$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 \varphi_3}{d\tau^2} + \omega_0^2 \varphi_3 = -2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 \varphi_2}{d\tau^2} - (2\omega_0 \omega_2 + \omega_1^2) \frac{d^2 \varphi_1}{d\tau^2} - 3\beta \varphi_0^2 \varphi_1 - (2\omega_0 \omega_3 + 2\omega_1 \omega_2) \frac{d^2 \varphi_0}{d\tau^2} - (2\alpha \varphi_0 \varphi_1 + \alpha \varphi_1^2) \quad (\varepsilon \text{ 的 } 3 \text{ 次幂项}) \quad (19)$$

把式(13)的各阶摄动项都表示为系数待定的傅立叶级数,且满足初始条件式(15)即

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \varphi_0(\tau) + \varepsilon \varphi_1(\tau) + \varepsilon^2 \varphi_2(\tau) + \varepsilon^3 \varphi_3(\tau) + \dots \\ &= c \cos(\tau) + \varepsilon [c_1 + b_1 \cos(\tau) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i1} \cos(i\tau)] + \varepsilon^2 [c_2 + b_2 \cos(\tau) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i2} \cos(i\tau)] + \varepsilon^3 [c_3 + b_3 \cos(\tau) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i3} \cos(i\tau)] + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

$$c_j + b_j \cos(\tau) + \sum_{i=2}^{\infty} a_{ij} = 0, j = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

把式(20)中的  $\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau)$  的级数表达式代入式(17)式中可得

$$\left[ c_1 + \sum_{i=2}^{\infty} (1 - i^2) a_{i1} \cos(i\tau) \right] = \frac{2\omega_1 c}{\omega_0} \cos \tau -$$

$$\frac{c^2 \alpha}{2\omega_0^2} - \frac{c^2 \alpha}{2\omega_0^2} \cos(2\tau) \quad (22)$$

利用(22)式并结合(21)式可以得到

$$c_1 = -\frac{c^2 \alpha}{2\omega_0^2}, \omega_1 = 0, a_{21} = \frac{c^2 \alpha}{6\omega_0^2}, b_1 = \frac{c^2 \alpha}{3\omega_0^2} \quad (23)$$

所以  $\varphi_1(\tau)$  的表达式为

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{c^2 \alpha}{2\omega_0^2} + \frac{c^2 \alpha}{3\omega_0^2} \cos \tau + \frac{c^2 \alpha}{6\omega_0^2} \cos(2\tau) \quad (24)$$

将  $\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)$  代入(18)式中可得

$$\begin{aligned} \left[ c_2 + \sum_{i=2}^{\infty} (1 - i^2) a_{i2} \cos(i\tau) \right] &= -\frac{c^3 \alpha^2}{3\omega_0^4} + \left( \frac{2c\omega_2}{\omega_0} + \frac{5c^3 \alpha^2}{6\omega_0^4} - \frac{3c^3 \beta}{4\omega_0^2} \right) \cos(\tau) - \frac{c^3 \alpha^2}{3\omega_0^4} \cos(2\tau) - \left( \frac{c^3 \alpha^2}{6\omega_0^4} + \frac{c^3 \beta}{4\omega_0^2} \right) \cos(3\tau) \end{aligned} \quad (25)$$

利用(25)式并结合(21)式可得

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c^3 \alpha^2}{3\omega_0^4}, \omega_2 = \frac{3c^2 \beta}{8\omega_0} - \frac{5c^2 \alpha^2}{12\omega_0^3}, a_{22} = \frac{c^3 \alpha^2}{9\omega_0^4}, \\ a_{32} &= \frac{c^3 \alpha^2}{48\omega_0^4} + \frac{c^3 \beta}{32\omega_0^2}, b_2 = \frac{29c^3 \alpha^2}{144\omega_0^4} + \frac{c^3 \beta}{32\omega_0^2} \end{aligned} \quad (26)$$

所以  $\varphi_2(\tau)$  的表达式为

$$\begin{aligned} \varphi_2(\tau) &= -\frac{c^3 \alpha^2}{3\omega_0^4} + \left( \frac{29c^3 \alpha^2}{144\omega_0^4} + \frac{c^3 \beta}{32\omega_0^2} \right) \cos(\tau) + \frac{c^3 \alpha^2}{9\omega_0^4} \cos(2\tau) + \left( \frac{c^3 \alpha^2}{48\omega_0^4} + \frac{c^3 \beta}{32\omega_0^2} \right) \cos(3\tau) \end{aligned} \quad (27)$$

将  $\varphi_0(\tau), \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \varphi_3(\tau)$  代入(19)式可得

$$[c_3 + \sum_{i=2}^{\infty} (1-i^2)a_{3i} \cos(i\tau)] = (\frac{21c^4 a\beta}{32\omega_0^4} - \frac{25c^4 a^3}{48\omega_0^6}) + (\frac{2c\omega_3}{\omega_0} + \frac{5c^4 a^3}{9\omega_0^4} - \frac{c^4 a\beta}{2\omega_0^4}) \cos(\tau) + (\frac{c^4 a\beta}{\omega_0^4} - \frac{2c^4 a^3}{3\omega_0^6}) \cos(2\tau) - (\frac{c^4 a^3}{6\omega_0^6} + \frac{c^4 a\beta}{4\omega_0^4}) \cos(3\tau) - (\frac{5c^4 a^3}{144\omega_0^6} + \frac{5c^4 a\beta}{144\omega_0^4}) \cos(4\tau) \quad (27)$$

利用(27)式及(21)式可得

$$c_3 = \frac{21c^4 a\beta}{32\omega_0^4} - \frac{25c^4 a^3}{48\omega_0^6}, \omega_3 = \frac{c^3 a\beta}{4\omega_0^3} - \frac{5c^3 a^3}{18\omega_0^5}, a_{23} = \frac{2c^4 a^3}{9\omega_0^6} - \frac{c^4 a\beta}{3\omega_0^4}, a_{33} = \frac{c^4 a^3}{48\omega_0^6} + \frac{c^4 a\beta}{32\omega_0^4}, a_{43} = \frac{c^4 a^3}{432\omega_0^6} + \frac{c^4 a\beta}{96\omega_0^4}, b_3 = \frac{119c^4 a^3}{432\omega_0^6} - \frac{35c^4 a\beta}{96\omega_0^4} \quad (28)$$

所以  $\varphi_3(\tau)$  的表达式为

$$\varphi_3(\tau) = \frac{21c^4 a\beta}{32\omega_0^4} - \frac{25c^4 a^3}{48\omega_0^6} + (\frac{119c^4 a^3}{432\omega_0^6} - \frac{35c^4 a\beta}{96\omega_0^4}) \cos(\tau) + (\frac{2c^4 a^3}{9\omega_0^6} - \frac{c^4 a\beta}{3\omega_0^4}) \cos(2\tau) + (\frac{c^4 a^3}{48\omega_0^6} + \frac{c^4 a\beta}{32\omega_0^4}) \cos(3\tau) + (\frac{c^4 a^3}{432\omega_0^6} + \frac{c^4 a\beta}{96\omega_0^4}) \cos(4\tau) \quad (29)$$

综合(23)式 - (29)式可以得到(11)式的三级近似解,令  $\Delta = \epsilon c$  (为位移振幅)。

$$\omega = \omega_0 + \Delta^2 (\frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5a^2}{12\omega_0^3}) + \Delta^3 (\frac{a\beta}{4\omega_0^3} - \frac{5a^3}{18\omega_0^5}) \quad (30)$$

$$A(\tau) = \epsilon\varphi(\tau) = \Delta \cos(\tau) + \Delta^2 a [-\frac{1}{2\omega_0^2} + \frac{1}{3\omega_0^2} \cos\tau + \frac{1}{6\omega_0^2} \cos(2\tau)] + \Delta^3 [-\frac{a^2}{3\omega_0^4} + (\frac{29a^2}{144\omega_0^4} + \frac{\beta}{32\omega_0^2}) \cos(\tau) + \frac{a^2}{9\omega_0^4} \cos(2\tau) + (\frac{a^2}{48\omega_0^4} + \frac{\beta}{32\omega_0^2}) \cos(3\tau)] + \Delta^4 [\frac{21a\beta}{32\omega_0^4} - \frac{25a^3}{48\omega_0^6} + (\frac{119a^3}{432\omega_0^6} - \frac{35a\beta}{96\omega_0^4}) \cos(\tau) + (\frac{2a^3}{9\omega_0^6} - \frac{a\beta}{3\omega_0^4}) \cos(2\tau) + (\frac{a^3}{48\omega_0^6} + \frac{a\beta}{32\omega_0^4}) \cos(3\tau) + (\frac{a^3}{432\omega_0^6} + \frac{a\beta}{96\omega_0^4}) \cos(4\tau)] \quad (31)$$

2.3 考虑弯曲刚度的非线性分析

基本假定:(1)考虑拉索的抗弯刚度、不考虑抗剪刚度及抗扭刚度。(2)索在振动过程中处于线弹性范围。

考虑斜拉索弯曲刚度时,振动微分方程就为(4)式。

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 (y + y_0)}{\partial x^2} - Ts \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$$

此时对于式(11)  $\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_0^2 A + \alpha A^2 + \beta A^3 = 0$  只是系数发生变化。

$$\omega_0^2 = [EI \int_0^l Y \frac{d^4 Y}{dx^4} dx - \frac{EA_0}{l} \int_0^l (\frac{dY}{dx} \cdot \frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{d^2 y_0}{dx^2} \cdot Y + Ts \cdot Y \cdot \frac{d^2 Y}{dx^2}) dx] / (\int_0^l m \cdot Y^2 \frac{dY}{dx} dx)$$

$$\alpha = [-\frac{EA_0}{2l} (\int_0^l (\frac{dY}{dx})^2 \cdot \frac{d^2 y_0}{dx^2} \cdot Y dx + 2 \int_0^l \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dy_0}{dx} \cdot \frac{d^2 Y}{dx^2} \cdot Y dx)] / (\int_0^l m \cdot Y^2 \frac{dY}{dx} dx)$$

$$\beta = [-\frac{EA_0}{2l} \int_0^l \frac{d^2 Y}{dx^2} \cdot Y dx \cdot \int_0^l (\frac{dY}{dx})^2 dx] / (m \int_0^l Y^2 dx)$$

非线性求解过程同不考虑弯曲刚度一致。

3 实例分析

以南京长江二桥 A20 编号索为实例进行讨论分析,该索的主要参数为: $l = 292.389m, h = 153.859m, L = 330.4m, T_s = 7516.8kN, m = 82.123kg/m, A_0 = 1.0198e - 2m^2, E = 1.9e11N/m^2$ , 各阶阵型函数可取

$$Y(x) = \sin(\frac{i\pi x}{l}) \quad (32)$$

把(32)式代入各参数中进行积分,并把求得结果代入式(30)和式(31)中,可以得到各阶频率和振幅解;利用 ANSYS 进行有限元分析,不考虑弯曲刚度时,有限元计算采用 LINK10 单元,考虑弯曲刚度时采用 Beam3 单元,初始应力采用施加初始应变的方法施加,其结果如下表。

表 1 不同倾角的一阶固有频率有限元解

Tab.1 Finite element solution of first natural frequency for different angle

倾角(°)	0	30	60	90
1 阶	0.47024	0.46813	0.46382	0.46161

表2 考虑静力垂度1阶固有频率公式解

Tab.2 Formular solution of first natural frequency considering static bend

$\Delta$	$T_s$					
	5 016.8	5 516.8	6 016.8	6 516.8	7 016.8	7 516.8
0.1	0.391 8	0.406 3	0.421 0	0.435 6	0.450 1	0.464 4
0.5	0.391 9	0.406 5	0.421 2	0.435 9	0.450 4	0.464 6
1.5	0.393 4	0.408 2	0.423 0	0.437 7	0.452 3	0.466 5

表3 考虑静力垂度2阶固有频率公式解

Tab.3 Formular solution of second natural frequency considering static bend

$\Delta$	$T_s$					
	5 016.8	5 516.8	6 016.8	6 516.8	7 016.8	7 516.8
0.1	0.783 6	0.812 7	0.842 0	0.871 3	0.900 3	0.928 9
0.5	0.786 0	0.815 0	0.844 3	0.873 5	0.902 5	0.930 9
1.5	0.806 4	0.834 7	0.863 4	0.891 9	0.920 3	0.948 2

表4 考虑弯曲刚度1阶固有频率公式解

Tab.4 Formular solution of first natural frequency considering bending rigidity

$\Delta$	$T_s$					
	5 016.8	5 516.8	6 016.8	6 516.8	7 016.8	7 516.8
0.1	0.391 8	0.406 3	0.421 0	0.435 6	0.450 1	0.464 4
0.5	0.391 9	0.406 5	0.421 2	0.435 9	0.450 4	0.464 6
1.5	0.393 5	0.408 2	0.423 0	0.437 7	0.452 3	0.466 5
有限元解	0.376 9	0.395 2	0.412 8	0.429 6	0.445 9	0.461 6

## 4 结论

1)随着斜拉索的拉力不断增大,固有频率随之增大,原因是索力使斜拉索“刚化”。

2)考虑静力垂度及弯曲刚度与张紧弦理论1阶频率误差达到5%以上,2阶频率误差达到7.8%。因此大幅振动应采用非线性理论研究。

3)随着索力的增大,非线性计算值与张紧弦计算值差距缩小,主要是索力的增大使斜拉索的非线性相对减弱。

4)对于长跨斜拉索,考虑静力垂度的非线性足够满足精度要求,弯曲刚度几乎没有影响,这与文献<sup>[4]</sup>的部分结论一致。

5)通过不同倾角的有限元分析,倾角越大,静力垂度影响越小,90°时结论与张紧弦结果比较一致。

## 参考文献:

- [1] LILJEN J L, A PINTO DA COSTA. Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable stayed structures[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994;174(2):69-90.
- [2] 刘延柱.非线性振动[M].北京:高等教育出版社,2001.
- [3] 王修勇.斜拉桥-阻尼器系统的动力特性分析[J].长沙铁道学院学报,2001(4):68-72.
- [4] 夏桂云,李传习,张建仁.斜拉索非线性分析[J].长沙铁道学院学报,2001,(3):47-50.
- [5] 魏建东.斜拉桥中拉索的静力设计[J].桥梁建设,1999,(2):21-23.
- [6] 林元培.斜拉桥[M].北京:人民交通出版社,1994.
- [7] 何君毅,林祥都.工程结构非线性问题的数值解法[M].北京:国防工业出版社,1994.
- [8] 沈世钊.悬索结构设计[M].北京:中国建筑工业出版社,2006.
- [9] 王新敏. ANSYS工程结构数值分析[M].北京:人民交通出版社,2007.

(责任编辑 刘存英)

# 考虑弯曲刚度的斜拉索固有振动特性分析

作者: 高永强, 王秀红, GAO Yong-qiang, WANG Xiu-hong  
作者单位: 高永强, GAO Yong-qiang(石家庄铁道学院, 中铁公司, 河北, 石家庄, 050043), 王秀红, WANG Xiu-hong(石家庄铁道学院, 四方分院, 河北, 石家庄, 050043)  
刊名: 河北工程大学学报(自然科学版) **ISTIC**  
英文刊名: JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING (NATURAL SCIENCE EDITION)  
年, 卷(期): 2008, 25(4)  
被引用次数: 2次

## 参考文献(9条)

1. LILJEN J L; A PINTO DA COSTA Vibration amplitudes caused by parametric excitation of cable stayed structures 1994(02)
2. 刘延柱 非线性振动 2001
3. 王修勇 斜拉桥-阻尼器系统的动力特性分析[期刊论文]-长沙铁道学院学报 2001(04)
4. 夏桂云; 李传习; 张建仁 斜拉索非线性分析[期刊论文]-长沙铁道学院学报 2001(03)
5. 魏建东 斜拉桥中拉索的静力设计[期刊论文]-桥梁建设 1999(02)
6. 林元培 斜拉桥 1994
7. 何君毅; 林祥都 工程结构非线性问题的数值解法 1994
8. 沈世钊 悬索结构设计 2006
9. 王新敏 ANSYS工程结构数值分析 2007

## 本文读者也读过(10条)

1. 魏士勇. 赵金鹏. 刘树平. WEI Shi-yong. ZHAO Jin-peng. LIU Shu-ping 大跨度斜拉桥拉索索管定位计算[期刊论文]-山西建筑2007, 33(22)
2. 于朝江 一类微分方程的奇异摄动解[期刊论文]-西南科技大学学报2003, 18(2)
3. 唐荣荣. TANG RONGRONG 一类伴有边界摄动的非线性奇摄动四阶微分方程三点边值问题[期刊论文]-应用数学学报2008, 31(2)
4. 姜健 拉索端部弹性约束振动控制研究[学位论文]2009
5. 姜健. 李国强. 郝坤超 拉索平面内自由振动影响因素分析[期刊论文]-振动、测试与诊断2009, 29(3)
6. 楼梦麟. 白建方. LOU Meng-lin. BAI Jian-fang FRP加固梁模态分析的摄动解法[期刊论文]-建筑科学与工程学报2005, 22(2)
7. 王永岗. 宋慧芳. 胥掌世. WANG Yonggang. SONG Huifang. XU Zhangshi 双层旋转扁壳非线性振动分析的同伦摄动法[期刊论文]-清华大学学报(自然科学版) 2007, 47(8)
8. 唐荣荣. TANG Rong-rong 一类四阶非线性奇摄动方程的边界层问题[期刊论文]-数学杂志2007, 27(4)
9. 冉志红. 李乔. RAN Zhi-hong. LI Qiao 提高斜拉索索力估算精度的一种新方法[期刊论文]-公路交通科技 2007, 24(8)
10. 冉志红. 李乔. RAN Zhihong. LI Qiao 斜拉索非线性振动的奇异摄动解法[期刊论文]-西南交通大学学报 2006, 41(3)

## 引证文献(2条)

1. 杜文学. 张令心. 韩雪. 胡明祯 预应力悬索结构的动力模型及模态响应分析[期刊论文]-黑龙江科技学院学报 2013(6)
2. 仲济涛. 何丽丽. 高瑞贞. 张京军 斜拉桁架施加预应力后的节点位移分析与拟合[期刊论文]-河北工程大学学报

本文链接: [http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_hbjkjxyxb200804007.aspx](http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_hbjkjxyxb200804007.aspx)