

文章编号:1673-9468(2008)04-0025-04

结构地震可靠度的数值-模拟方法

严再春,何 军

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院 土木工程系,上海 200240)

摘要:本文发展了一种数值-模拟方法,计算谱密度不确定非平稳地震荷载下的结构地震可靠度。在该方法中,首先由高斯积分给出了无条件结构地震可靠度的加权和计算公式,然后利用 Monte Carlo 模拟方法计算高斯点处的条件结构地震可靠度,最后得到无条件结构地震可靠度。文中计算了一个单自由度结构的可靠度,并与直接模拟结果进行了对比分析,分析表明,数值-模拟方法具有良好的精度和效率。

关键词:地震可靠度;非平稳地震荷载;首次穿越概率;数值积分;Monte Carlo 模拟
中图分类号: TU311.3 **文献标识码:** A

Numerical - simulation method for structural seismic reliability

YAN Zai-chun, HE Jun

(Department of Civil Engineering, School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200240, China)

Abstract: A numerical - simulation method is developed to calculate seismic reliabilities of structures subjected to non - stationary earthquake load with uncertain spectral density in this paper. First, the numerical solutions of the structural unconditional seismic reliability are given from Gauss' s integration. Secondly, conditional seismic reliabilities in the numerical solutions at Gauss points are estimated by Monte Carlo simulations. Finally, the unconditional structural seismic reliabilities are calculated by combining the numerical solution and the obtained conditional reliabilities. Numerical results of a single - degree - of - freedom (SDOF) system are compared with that from the plain Monte Carlo simulation, which demonstrates the accuracy and efficiency of the numerical - simulation method.

Key words: seismic reliability; non - stationary earthquake load; first - passage probability; numerical integration; monte carlo simulation

建筑结构的抗震安全性是结构安全设计的关键问题之一。建筑结构的抗震安全性分析涉及地震动地面加速度的随机性以及结构参数(主要包括结构阻尼和刚度)的随机波动和不确定性等,由于这些不确定性的存在,建筑结构抗震安全性往往由结构可靠度进行评估^[1]。建筑结构的抗震可靠度可由结构随机振动中的首次穿越概率来度量,遗憾的是该问题不存在精确的解析解^[2]。常用的近似解析解一般包括:穿越方法、内外推级数方法和随机平均法^[3]。穿越方法在受白噪声激励的系统首次穿越分析中取得了良好的效果,但对于受非

平稳激励的系统,方法的有效性受到很大的限制^[2]。内外推级数方法是以级数展开形式,通过适当的截断给出研究问题的近似解,该方法具有较大的计算复杂性和较低的计算效率,不适合复杂结构的分析^[4]。随机平均法需要数值求解控制可靠度函数的 Fok - Plank - Kolmogorov (FPK) 方程,因而仅适用于自由度较少的系统^[4]。Monte Carlo 模拟(MCS)方法也经常用于分析随机振动的首次穿越问题。由于 Monte Carlo 模拟方法原理简单,对功能函数形式及变量的分布形式无特殊要求,而且计算精度仅与模拟次数有关,容易确定计

收稿日期:2008-09-02

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No.50478017)

作者简介:严再春(1979-),女,江西上饶人,硕士研究生,从事可靠度方面的研究。

算误差,因此,MCS方法在结构地震可靠度分析中具有广泛的应用。

本文采用首次穿越破坏准则,发展了一种数值-模拟方法,计算谱密度不确定非平稳地震荷载下的结构地震可靠度。在该方法中,首先由高斯积分给出了无条件结构地震可靠度的加权和计算公式,然后利用 Monte Carlo 模拟高斯点处的条件结构地震可靠度,最后得到无条件结构地震可靠度。算例表明该方法具有良好精度和效率。

1 无条件结构地震可靠度

首次穿越概率是指所考虑的随机过程首次穿越有限安全域边界的时间的概率,即在时间区间 $[0, t]$ 内,任一结构响应 $Y(t)$, 超过确定临界界限水平 $b(t)$ 的概率^[5]

$$P_F(t|s) = P(\{\exists \tau \in [0, t] : |Y(\tau)| \geq b(\tau)\}) \quad (1)$$

式中 $P_F(t|s)$ —给定 S 的条件结构首次穿越概率; $Y(\tau)$ —给定 S 条件下 τ 时刻的结构反应。

考虑谱密度 S 的不确定性,结构无条件结构首次穿越概率^[2]

$$P_F(t) = \int_0^1 P(t|s) f_s(s) ds \quad (2)$$

式中 $f_s(s)$ —谱密度 S 概率密度函数。

在本项研究中,地震动地面加速度为过滤白噪声地震动荷载,而谱密度一般用 Clough - Penzien 模型,则随机地面加速度 $a(t)$ 由下列方程给出^[5]

$$\begin{aligned} \ddot{a}(t) + 2\zeta_{22}\omega_{22}\dot{a}(t) + \omega_{22}^2 a(t) &= \\ 2\zeta_{21}\omega_{21}\dot{a}_1(t) + \omega_{21}^2 a_1(t) & \\ \ddot{a}_1(t) + 2\zeta_{11}\omega_{11}\dot{a}_1(t) + \omega_{11}^2 a_1(t) &= e(t)W(t) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 ω_{11} 和 ζ_{11} —地表土层卓越频率和阻尼比; ω_{22} 和 ζ_{22} —截止频率和阻尼比(二次过滤器参数,表示模拟地震动低频能量的变化参数),它们反映了地表土层特性对地震动加速度的影响。

调制函数 $e(t)$ 写为

$$e(t) = \begin{cases} (t/4)^2 & t \leq 4 \\ 1 & 4 < t \leq 14 \\ \exp[-(t-14)^2/2] & t > 14 \end{cases} \quad (4)$$

$W(t)$ 是具有不确定谱密度 S 的平稳高斯白噪声过程。

2 无条件地震可靠度的数值解

利用公式(2)计算结构首次穿越概率时,通常假设谱密度 S 服从确定的概率分布,该积分是解一个无限积分域问题,多自由度结构很难直接得到该问题的解析解。利用直接 MCS 方法计算结构首次穿越概率时,每次模拟都需要按确定概率分布生成谱密度变量随机数,重新计算结构反应,因而计算费用昂贵。

为降低计算费用,利用数值积分,把上述积分问题转化为简单的求和形式,通过选择适当的积分点,得到原积分问题的近似解。为此,分别设下分位数为 a , 上分位数为 c , 即 $P(s < a) = \alpha$, $P(s < c) = \beta$, 再令 $g(z) = \frac{c-a}{2}z + \frac{c+a}{2}$, 积分域可写为 $[-1, 1]$ 。

$$\begin{aligned} P_F(t) &= \int_0^1 P(t|s) f_s(s) ds \cong \\ \int_a^c P(t|s) f_s(s) ds &= \frac{c-a}{2} \int_{-1}^1 P\left(t \mid \frac{c-a}{2}z + \frac{c+a}{2}\right) f_s\left(\frac{c-a}{2}z + \frac{c+a}{2}\right) dz \end{aligned} \quad (5)$$

利用 Gauss - Legendre 求积公式,上式可简化为

$$P_F(t) \cong \frac{c-a}{2} \sum_{k=0}^n A_k P(t|g(z_k)) f_s(g(z_k)) \quad (6)$$

式中 z_k 和 A_k —Gauss - Legendre 求积公式的节点(高斯点)和权重系数; $P(t|g(z_k))$ 和 $f_s(g(z_k))$ —高斯点处的首次穿越概率和谱密度概率密度函数。

$n+1$ 个高斯点使得求积公式(6)具有 $2n+1$ 次代数精度。

通过高斯数值积分,用 MCS 方法计算确定高斯点处的条件首次穿越概率,按加权求和的形式,即将无条件首次穿越概率的计算转化为条件首次穿越概率的计算,得到公式(2)的近似解。

3 条件地震可靠度的模拟计算

3.1 首次穿越概率计算

用 MCS 求解结构首次穿越概率是通过大量重复随机试验中结构发生穿越的频率来近似估算结构的首次穿越概率。设示性函数 I_i

$$I_i = \begin{cases} 1 & \forall \tau \in [0, t], \text{有 } |Y_i(\tau)| \geq b_i(\tau) \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (7)$$

则首次穿越概率可以由所有样本 I_i 的均值表示^[6]

$$\bar{P}_F(t) = E[I] = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{i=0}^{N_{sim}} I_i \quad (8)$$

3.2 荷载样本模拟

由于非平稳地震荷载由平稳高斯白噪声过程的均匀调制给出^[7], 因此需要进行平稳高斯白噪声过程的模拟。本文由独立的单位正态随机序列 z_i 按阶梯构造方式连接模拟高斯白噪声过程的样本^[2]。

$$w_i = \sqrt{\frac{D}{\Delta t}} z_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

式中 $D = 2\pi S$ —白噪声强度; z_i —独立同分布的高斯随机变量; Δt —时间增量, 为了满足工程精度要求, 可取反应周期的 20 分之一^[8]。

结合第2小节的定义, 得到地震动地建加速度样本 $\ddot{u}(t)$ 。

3.3 反应样本模拟

结构反应的样本由地震动地面加速度样本经杜哈米积分得到^[9]

$$Y(t) = \int_0^t h(t-\tau) \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (10)$$

式中 $h(t)$ —对应反应 $Y(t)$ 的单位脉冲反应函数。

带入地震荷载样本, 则有

$$Y(t_k) = \sum_{j=1}^k h[(k-j+1)\Delta t] e^{-(j-1)\Delta t} z_j \sqrt{2\pi s_j \Delta t} \quad (11)$$

式中 $k = \frac{t_k}{\Delta t} + 1$ —离散时间点。

4 算例分析

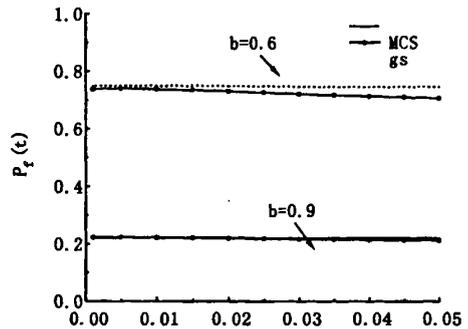
本算例的目的是验证本文方法的精度和效率。考虑一个受过滤白噪声地震荷载激励的单自由度系统, 固有频率 $\omega_0 = 2\pi \text{rad/s}$, 阻尼比 $\zeta = 5\%$, 谱密度服从对数正态分布 $S \sim LN(\text{Log}[2], 0.1)$ 。

脉冲反应函数

$$h(t) = \frac{1}{\omega_d} \exp(-\zeta \omega_0 t) \sin \omega_d t \quad (12)$$

式中 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$ —结构阻尼频率。

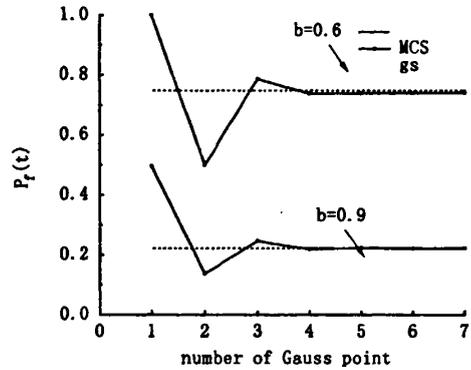
分析中, 令 $t = 20s$, $\Delta t = 0.05s$, 则时间样本点总数为 $n_t = t/\Delta t + 1 = 20/0.05 + 1 = 401$ 。



(虚线: 10000次MCS; 实线: 5点高斯数值积分法)

图1 $t=10s, \alpha+\beta=1$ 首次穿越概率

Fig. 1 $t=10s, \alpha+\beta=1$ first-passage probability



(虚线: 10000次MCS; 实线: 高斯数值积分法)

图2 $t=10s, a=0.25\%, \beta=99.75\%$ 首次穿越概率

Fig. 2 $t=10s, a=0.25\%, \beta=99.75\%$ first-passage probability

图1表示 $t = 10s$, 5点高斯数值积分法时, 不同上、下分位数对应的结构首次穿越概率。由图1可以看到, 当 α 较小时, 数值-模拟方法的结果与直接 MCS 结果吻合较好, α 过大时出现误差较大的情况, 原因可用公式(5)来解释, 由于谱密度概率密度函数截断范围过大, 过多地忽略了谱密度对首次穿越概率的影响, 导致本文方法结果与 MCS 结果误差较大。图2表示 $t = 10s, \alpha = 0.25\%, \beta = 99.75\%$ 时, 不同高斯点个数对应的结构首次穿越概率。由图2中可以看到, 当高斯点个数大于等于4时, 本文方法的结果与直接 MCS 结果吻合较好, 当高斯点个数小于4时出现误差较大的情况, 原因是在公式(6)高斯点个数 n 较小时, 利用高斯数值积分计算的结构首次穿越概率代数精度不够, 导致本文方法的结果与 MCS 结果误差较大。

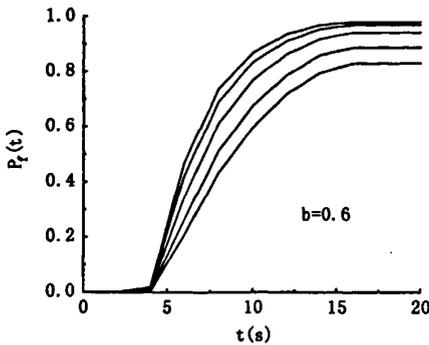
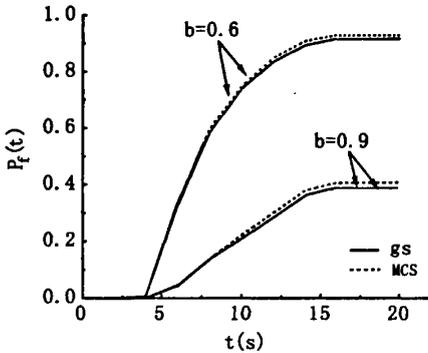


图3 $\alpha = 0.25\%$, $\beta = 99.75\%$
各高斯点对应的首次穿越概率

Fig.3 $\alpha = 0.25\%$, $\beta = 99.75\%$ first-passage
probability at each 5 Gauss points



(虚线: 10000次MCS; 实线: $\alpha = 0.25\%$,
 $\beta = 99.75\%$, 5点高斯数值积分法)
图4 首次穿越概率

Fig.4 First-passage probability

图3表示 $\alpha = 0.25\%$, $\beta = 99.75\%$, 5点高斯数值积分时,各个高斯点对应的条件首次穿越概率,经公式(6)加权求和,如图4所示。在本算例中,利用数值模拟方法计算无条件结构首次穿越概率,通过合理选择上下分位数和高斯积分点个数,本文方法的结果与MCS模拟的结果吻合良好。

如公式(11)所示,用直接MCS方法计算结构反应时,谱密度 S 是一个未知变量,每次模拟均需重新生成随机数再计算结构反应;用数值模拟方

法计算结构反应时,谱密度 S 作为定值,可直接计算结构反应,不需重复计算,这样大大提高了计算效率。

5 结语

利用本文方法计算了一个单自由度结构在地震荷载作用下的可靠度,并与直接MCS结果进行了对比分析,分析表明,数值-模拟方法具有良好的精度和效率。本文仅考虑了地震动荷载和谱密度不确定情况,该方法还可用于其它结构参数不确定的情况。需要指出的是,利用本文提出的方法,应进行适当的截断,合理选择分位数和高斯点个数,确保计算误差在有效范围内。

虽然算例为一个单自由度系统,但通过算例分析,该方法为多自由度线性结构的无条件地震可靠度计算提供了应用示范和参考。

参考文献:

- [1] 李桂青.工程结构时变可靠度理论及其应用[M].北京:科学出版社,2001.
- [2] 朱位秋.随机振动[M].北京:科学出版社,1992.
- [3] LANGLEY R S. A first passage approximation for normal stationary random processes[J]. Sound and Vib., 1988, 122(2): 261-75.
- [4] 何军.结构首次穿越失效研究的新进展[J].地震工程与工程振动,2006,26(5): 55-59.
- [5] AU S K, BECK J L. First excursion probabilities for linear systems by very efficient importance sampling[J]. Probabilistic Engineering Mechanics,2001,16: 193-207.
- [6] VEIT BAYER, CHRISTIAN BUCHER. Importance sampling for first passage problems of nonlinear structures[J]. Probabilistic Engineering Mechanics,1999, 14: 27-32.
- [7] 欧进萍,王光远.结构随机振动[M].北京:高等教育出版社,1998.
- [8] CRANDALL S H, CHANDIRAMANI K L. Some first-passage problems in random vibration[J]. Journal of Applied Mechanics,1966,9:532-538.
- [9] 王光远,译.结构动力学[M].北京:高等教育出版社,2006.

(责任编辑 刘存英)