文章编号:1673-9468(2008)04-0110-03

离散模糊变量的条件熵及其性质

马 丽
(江苏大学 理学院,江苏 镇江 212013)

摘要:为了度量给定一个模糊变量条件下另一个模糊变量的不确定性,本文在可信性理论的基础上,给出离散模糊变量的条件熵的定义,并研究了它的下界,上界,同时得到独立简单模糊变量条件熵取上界的充分必要条件。

关键词:可信性测度;模糊变量;模糊向量;条件熵
中图分类号:O236 文献标识码:A

Conditional entropy for discrete fuzzy variables and its properties

MA Li
(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract: A definition of conditional entropy for discrete fuzzy variables is formulated based on credibility theory in order to measure the uncertainty of a fuzzy variable given. Its lower bound and upper bound are investigated. The sufficient and necessary condition for the upper bound that the conditional entropy for independent simple fuzzy variables takes is obtained.

Key words: credibility measure; fuzzy variable; fuzzy vector; conditional entropy

模糊集的概念是由Zadeh[1]在1965年提出的。为了度量模糊事件,Zadeh[2]在1978年提出可能性测度。由于可能性测度不具有自对偶性,它不能完全满足理论和实际的需要。为定义一个自对偶的测度,Liu和Liu[3]在2002年提出了可信性测度,2004年,Liu[4]建立了可信性理论的公理基础,使可信性理论成为研究模糊现象的数学分支。

模糊熵是一种不确定性的度量,许多学者都给出过模糊熵的不同定义来度量模糊集或模糊变量的不确定性。基于可信性理论,文献[5]和[6]分别给出了模糊变量及模糊向量的熵的定义及其性质。本文从可信性理论出发,定义离散模糊变量的条件熵,并研究它的下界,上界,同时得到独立简单模糊变量条件熵取上界的充分必要条件。

1 定义

下文采用的记号同文献[5],公理及定义1-8来自于文献[5]。

设Θ是一非空集合,P为Θ的幂集,P中的每一个元素称为一个事件,对于P中的每个元素A,用$Cr\{A\}$表示事件A发生的可信性,我们接受以下四条公理。

公理1 $Cr\{\Theta\}=1$。

公理2 每当$A\subset B$时,都有$Cr\{A\}\le Cr\{B\}$。

公理3 对于任意事件A,有$Cr\{A\}+Cr\{A^c\}=1$。

公理4 对任何满足$\sup_i Cr\{A_i\}<0.5$的事件$\{A_i\}$,有$Cr\{\cup_i A_i\}=\sup_i Cr\{A_i\}$。

定义1 集合函数Cr称为可信性测度,如果它满足上述四条公理。

定义2 设Θ是一非空集合,P为Θ的幂集,Cr是一个可信性测度,则三元组(Θ,P,Cr)称为可信性空间。

定义3 设ξ是从可信性空间(Θ,P,Cr)到实数集R的一个函数,则称ξ是一个模糊变量。

定义4 设ξ是从可信性空间(Θ,P,Cr)到n维

收稿日期:2008-10-11
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571076)
作者简介:马丽(1981-),女,山西太原人,硕士研究生,从事概率极限理论与信息论的研究。

实数向量空间 R^n 的函数,则称 ζ 是一个模糊向量。

定义5 设 ζ 是可信性空间 (Θ,P,Cr) 上的模糊变量,则它的隶属函数定义为

$\mu(x)=(2Cr\{\zeta=x\})\wedge 1,\forall x\in R$ 。

定义6 模糊变量 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_m$ 称为是独立的,如果对于实数集 R 中的任意子集 $B_1,B_2,\cdots B_m$,有

$$Cr\{\bigcap_{i=1}^{m}\{\zeta_i\in B_i\}\}=\min_{1\le i\le m}Cr\{\zeta_i\in B_i\}$$

定义7 设 (Θ,P,Cr) 是一个可信性空间,$A,B\in P$,且 $Cr\{B\}>0$,则给定 B 条件下 A 的条件可信性测度定义为

$$Cr\{A|B\}=\begin{cases}\dfrac{Cr\{A\cap B\}}{Cr\{B\}}, & \text{如果}\dfrac{Cr\{A\cap B\}}{Cr\{B\}}<0.5\\ 1-\dfrac{Cr\{A^c\cap B\}}{Cr\{B\}}, & \text{如果}\dfrac{Cr\{A^c\cap B\}}{Cr\{B\}}<0.5\\ 0.5, & \text{其他}\end{cases}$$

定义8 设 ζ 是一个取值于 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 的离散模糊变量,则它的熵定义为 $H[\zeta]=\sum_{i=1}^{\infty}S(Cr\{\zeta=x_i\})$,其中 $S(t)=-t\ln t-(1-t)\ln(1-t)$。

定义9[6] 设 (ζ,η) 是一个二维离散模糊向量,其一切可能取值为 (x_i,y_j),$x_i,y_j\in R$,$i,j=1,2,\cdots$,则它的熵定义为 $H[\zeta,\eta]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}S(Cr\{\zeta=x_i,\eta=y_j\})$,其中 $S(t)=-t\ln t-(1-t)\ln(1-t)$。

2 离散模糊变量的条件熵

定义10 设 ζ,η 是分别取值于 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots\}$ 的离散模糊变量,假定 $Cr\{\zeta=x_i\}>0,i=1,2,\cdots$,则给定模糊变量 ζ 条件下 η 的条件熵定义为

$$H[\eta|\zeta]=\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i H[\eta|\zeta=x_i]=\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\sum_{j=1}^{\infty}S(Cr\{\eta=y_j|\zeta=x_i\})$$

其中

$$\omega_i=\frac{1}{2}(\max_k\{\mu_k|x_k\le x_i\}-\max_k\{\mu_k|x_k<x_i\}+\max_k\{\mu_k|x_k\ge x_i\}-\max_k\{\mu_k|x_k>x_i\}$$

$$S(t)=-t\ln t-(1-t)\ln(1-t)$$

注:容易证明,$\omega_i\ge 0$,且 $\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i=1$。

定理1 设 ζ,η 是分别取值于 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots\}$ 的离散模糊变量,且 $Cr\{\zeta=x_i\}>0,i=1,2,\cdots$,则 $H[\eta|\zeta]\ge 0$。

证明 由 ω_i 及函数 $S(t)$ 的非负性即得 $H[\eta|\zeta]\ge 0$。

定理2 设 ζ,η 是分别取值于 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,\cdots\}$ 的离散模糊变量,且 $Cr\{\zeta=x_i\}>0,i=1,2,\cdots$,则 $H[\eta|\zeta]=0$ 的充要条件是对于每个 $\zeta=x_i,i=1,2,\cdots$,至多存在一个 $\eta=y_{j_i},j_i\in\{1,2,\cdots\}$,使得 $\{\zeta=x_i,\eta=y_{j_i}$ 取非零可信性;且至少存在一个 $\zeta=x_k$,存在唯一的 $\eta=y_{j_k},j_k\in(1,2,\cdots)$,使得 $\{\zeta=x_k,\eta=y_{j_k}$ 取非零可信性,即此时 $Cr\{\zeta=x_k,\eta=y_{j_k}=1$,亦即 ζ,η 均为确定数。

证明 假设 $H[\eta|\zeta]=0$,则 $Cr\{\eta=y_j|\zeta=x_i\}=0$ 或 $1,i,j=1,2,\cdots$,下面分三种情形证明。

情形1:$Cr\{\eta=y_j|\zeta=x_i\}\equiv 0,i,j=1,2,\cdots$。由条件可信性测度的定义知 $Cr\{\eta=y_j,\zeta=x_i\}\equiv 0,i,j=1,2,\cdots$。此情形不可能出现,否则 $Cr\{\zeta\in X,\eta\in Y\}=\sup_{i,j}Cr\{\zeta=x_i,\eta=y_j\}=0$,与 $Cr\{\zeta\in X,\eta\in Y\}=1$ 矛盾。

情形2:对于 $\zeta=x_k$,存在 $\eta=y_{j_k},j_k\in\{1,2,\cdots\}$,使得 $Cr\{\eta=y_{j_k}|\zeta=x_k\}=1$,且 $Cr\{\eta=y_j|\zeta=x_i\}=0,i,j=1,2,\cdots,i\ne k$。对于这种情形,由公理3可得对于任意的 $j\ne j_k$,$Cr\{\eta=y_j|\zeta=x_k\}=0$ 。从而由条件可信性测度的定义得

$$Cr\{\eta=y_j,\zeta=x_k\}=0,\forall j\ne j_k \tag{1}$$

而由 $Cr\{\eta=y_j|\zeta=x_i\}=0,j=1,2,\cdots,i\ne k$ 知

$$Cr\{\eta=y_j,\zeta=x_i\}=0,j=1,2,\cdots,i\ne k \tag{2}$$

所以由(1),(2)可得 $Cr\{\eta=y_j,\zeta=x_i\}=0,\forall j\ne j_k,i\ne k$,从而由公理3知 $Cr\{\eta=y_{j_k},\zeta=x_k\}=1$,因此 ζ,η 均为确定数。

情形3:存在多于1个 x_i,分别存在相应的 y_{j_i},使得 $Cr\{\eta=y_{j_i}|\zeta=x_i\}=1$。不失一般性,我们设 $i=1,2,\cdots,j_i\in\{1,2,\cdots\}$,则 $Cr\{\eta=y_j|\zeta=x_i\}=0,\forall j\ne j_i,i=1,2,\cdots$。

由此可得 $Cr\{\eta=y_j,\zeta=x_i\}=0,\forall j\ne j_i,i=1,2,\cdots$,因此

$$Cr\{\bigcup_i\{\eta=y_{j_i},\zeta=x_i\}\}=1,j_i\in\{1,2,\cdots)。$$

所以 $0<Cr\{\eta=y_{j_i},\zeta=x_i\}<1,i=1,2,\cdots,j_i\in\{1,2,\cdots\}$。

反过来,若有多于1个 x_i,分别存在相应的唯一的 y_{j_i},使得 $\{\zeta=x_i,\eta=y_{j_i}\}$ 取非零可信性。

不失一般性，我们设 $0 < Cr\{\eta = y_{j_i}, \zeta = x_i\} < 1, i = 1,2,\cdots, j_i \in (1,2,\cdots\}$。

由于 $Cr\{\eta = y_j, \zeta = x_i\} = 0, \forall j \neq j_i, i = 1,2,\cdots$，所以 $Cr\{\eta = y_j | \zeta = x_i\} = 0, \forall j \neq j_i, i = 1,2,\cdots$。

由公理 3 知 $Cr\{\eta = y_{j_i} | \zeta = x_i\} = 1, i = 1,2,\cdots, j_i \in \{1,2,\cdots\}$，所以 $H[\eta|\zeta] = 0$。

若只有 $\zeta = x_k$，存在唯一的 $\eta = y_{j_k}, j_k \in \{1,2,\cdots\}$，使得 $\{\zeta = x_k, \eta = y_{j_k}\}$ 取非零可信性，则 $Cr\{\zeta = x_k, \eta = y_{j_k}\} = 1$，因此 ζ, η 分别为确定数 x_k 和 y_{j_k}。

$$Cr\{\eta = y_{j_k} | \zeta = x_k\} = 1 - \frac{Cr\{\eta \neq y_{j_k}, \zeta = x_k\}}{Cr\{\zeta = x_i\}}$$

$= 1 - 0 = 1$ 所以 $H[\eta|\zeta] = 0$。

注：定理 2 表明 ζ, η 均为确定数只是 $H[\eta|\zeta] = 0$ 的一个充分条件。

推论 1 设 ζ, η 是两个相互独立的模糊变量，ζ 取值于 $\{x_1, x_2, \cdots\}$，η 是一个确定数，且 $Cr\{\zeta = x_i\} > 0, i = 1,2,\cdots$，则 $H[\eta|\zeta] = 0$。

证明 设 $\eta = y$，则 $Cr\{\eta = y\} = 1$，因为 ζ 与 η 相互独立，所以

$Cr\{\zeta = x_i, \eta = y\} = Cr\{\zeta = x_i\} \wedge Cr\{\eta = y\} = Cr\{\zeta = x_i\}, i = 1,2,\cdots$。

又 $Cr\{\zeta = x_i\} > 0$，所以 ζ 是一个确定数或 $0 < Cr\{\zeta = x_i\} < 1, i = 1,2,\cdots$。

由定理 2 知 $H[\eta|\zeta] = 0$。

定理 3 设 ζ, η 是分别取值于 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 的简单模糊变量，且 $Cr\{\zeta = x_i\} > 0, i = 1,2,\cdots,m$，则 $H[\eta|\zeta] \leq n\ln 2$，等号成立当且仅当 (ζ, η) 是一个等可能模糊向量。

证明：由函数 $S(t)$ 在 $t = 0.5$ 处取得最大值 $\ln 2$ 及 $\sum_{i=1}^{m}\omega_i = 1$ 知 $H[\eta|\zeta] = \sum_{i=1}^{m}\omega_i \sum_{j=1}^{n} S(Cr\{\eta = y_j | \zeta = x_i\}) \leq n\ln 2$。等号成立当且仅当 $Cr\{\eta = y_i | \zeta = x_i\} = 0.5$，即对一切 $i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n$，有 $\frac{Cr\{\eta = y_j, \zeta = x_i\}}{Cr\{\zeta = x_i\}} \geq 0.5$ 与 $\frac{Cr\{\eta = y_j, \zeta \neq x_i\}}{Cr\{\zeta = x_i\}} \geq 0.5$ 同时成立，即对一切 $i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n$，有 $Cr\{\eta = y_j, \zeta = x_i\} = 0.5$。也就是说，$(\zeta, \eta)$ 是一个等可能模糊向量。

定理 4 设 ζ, η 是分别取值于 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 的相互独立的简单模糊变量，且 $Cr\{\zeta = x_i\} > 0, i = 1,2,\cdots,m$，则 $H[\eta|\zeta] = n\ln 2$ 当且仅当 ζ, η 均为等可能模糊变量。

证明：由定理 3 及 ζ, η 的独立性知 $H[\eta|\zeta] = n\ln 2$ 当且仅当

$Cr\{\eta = y_j\} \wedge Cr\{\zeta = x_i\} = 0.5, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n$

这就等价于

$Cr\{\eta = y_j\} = Cr\{\zeta = x_i\} = 0.5, i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n$

即 ζ, η 均为等可能模糊变量。

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8: 338 - 353.

[2] ZADEH L A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, (1): 3 - 28.

[3] LIU B, LIU Y K. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2002, 10(4): 445 ~ 450.

[4] LIU B. Uncertainty theory [M]. Berlin: Springer - Verlag, 2004.

[5] LIU B. Uncertainty theory, 3rd edition [EB/OL]. http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf, 2007.

[6] YOU C, WEN M. The entropy of fuzzy vectors [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(6): 1626 - 1633.

(责任编辑 刘存英)

离散模糊变量的条件熵及其性质

作者： 马丽， MA Li
作者单位： 江苏大学,理学院,江苏,镇江,212013
刊名： 河北工程大学学报(自然科学版) ISTIC
英文刊名： JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)： 2008,25(4)

参考文献(6条)

1. ZADEH L A Fuzzy sets[外文期刊] 1965(08)

2. ZADEH L A Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility 1978(01)

3. LIU B;LIU Y K Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models[外文期刊] 2002(04)

4. LIU B Uncertainty theory 2004

5. LIU B Uncertainty theory 2007

6. YOU C;WEN M The entropy of fuzzy vectors[外文期刊] 2008(06)