

文章编号:1673-9468(2009)01-0109-04

交通时间序列的多重分形特征分析

张宏¹,董科强^{1,2}

(1.河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038;2.北京交通大学 理学院,北京 100044)

摘要:通过分析2006年8月1日0时11分到8月10日14时11分的北京玉泉营高速公路的交通流量时间序列,发现其具有多重分形特征。首先利用幂谱、统计矩的方法研究流量时间序列表明了该序列自相似性。进一步借助多重分形谱的宽度、极大值以及谱曲线不对称程度对交通流量时间序列进行研究,结果表明,交通流量时间序列具有较好的多重分形特性。这将为多重分形在交通时间序列分析的研究提供重要的理论基础。

关键词:交通流量;幂谱;统计矩函数;多重分形谱

中图分类号: O29

文献标识码: A

Multifractal analysis of traffic flow time series

ZHANG Hong¹, DONG Ke-qiang^{1,2}

(1. School of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China;

2. School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: This paper analyzes the time series of the traffic flow at Yuquanying freeway of Beijing from No. 1 to 10 August 2006 and author finds the multifractal characters. The self-similarity of the time series of the traffic flow are found by using the method of power spectrum and statistical moments. The width, max. and asymmetry parameter of multifractal spectrum are employed in studying the traffic flow time series, which shows the strong degree of multifractality in the time series. This will provide an important theoretic foundation for researching multifractality in the theory of traffic time series.

Key words: traffic flow; power spectrum; multifractal spectrum; partition function

随着现代交通工具的发展,交通问题已经成为我国都市乃至世界城市的重要问题之一,而交通流量是考察交通问题的最重要因素之一。通常都市交通流量会显示出非规则性和复杂性^[1,2]。特别当进入或者离开交通阻塞时间段时,会显示出突然的变化,因此考察交通流量问题是一个非常重要的现实课题。

分形分析自上世纪被引入后就引起了人们极大的注意^[3]。近些年来,随着多重分形理论研究的深入,它已被成功地应用到物理学、生物学、经济学、地质学、气象学等领域^[4-6],其原理均是一种基于配分函数下的多重分形形式体系。本文尝试着将分形理论应用到交通领域中。

1 相关多重分形理论

1.1 幂谱

幂谱是研究分形的重要工具,对于时间序列 $\{X(t): t \in [0, T]\}$,幂谱是指它的 Fourier 变换的模的平方,即

$$E(\omega) = \frac{1}{T} \left\| \sum_{t=1}^T x(t) e^{-i\omega t} \right\|^2 \quad (1)$$

如果谱或者谱的一部分遵循幂律形式 $E(\omega) \propto \omega^{-\beta}$,其中 ω 是频率,等于时间的倒数, β 是幂谱指数,那么我们把满足幂律的频率区间及相应的时间区间称为无标度区间即分形关系成立的尺度区间。在无标度区间内,研究对象具有无标度

性即自相似性。

1.2 统计矩

我们要研究的时间序列为 $\{X(t) : t \in [0, T]\}$ 。首先把时间区间 $[0, T]$ 分割成若干不相交的小区间, 设 λ 为小区间长度与总区间长度比值的最大值, 记整个区间流量总和为 M , 即 $M = \sum_{t \in [0, T]} X(t)$ 。

第 i 个小区间概率密度分布函数为 $p_i(\lambda) = \frac{N(\lambda, i)}{M}$ 。

定义统计矩函数(也称为配分函数)

$$x_q(\lambda) \equiv \sum_i (p_i(\lambda))^q \quad (2)$$

指数 q 描述了统计矩的阶, 理论上是一个从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的数值。

若统计矩服从幂律关系 $x_q(\lambda) = \sum_i (p_i(\lambda))^q \propto \lambda^{\tau(q)}$, 则这个幂律关系通常反映在双对数关系图 $\log x_q(\lambda) \sim \log \lambda$ 上。在满足幂律关系的尺度区间, 我们可以通过双对数关系图来确定配分函数 $\tau(q)$ 。

$$\tau(q) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\log x_q(\lambda)}{\log \lambda} \quad (3)$$

通过分析 $\tau(q)$ 与 q 的关系, 如果两者之间存在着非线性关系, 则说明交通流量具有多重分形性; 如果 $\tau(q)$ 是 q 的线性函数, 则说明交通流量是单分形的。

广义分形维数 $D(q)$ 的定义为

$$D(q) = \begin{cases} \frac{1}{q-1} \lim_{\lambda \rightarrow 0} (4) \frac{\log x_q(\lambda)}{\log \lambda}, \dots q \neq 1 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i(\lambda) \log p_i(\lambda)}{\log \lambda}, \dots q = 1 \end{cases} \quad (4)$$

它与质量指数 $\tau(q)$ 据有如下关系:

$$D(q) = \begin{cases} \frac{\tau(q)}{q-1}, \dots q \neq 1 \\ \tau'(1), \dots q = 1 \text{ 且 } \tau(q) \text{ 可微} \end{cases} \quad (5)$$

特别地, 当 $q = 1$ 时, $D(1)$ 可以通过下式计算

$$D(1) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sum_i p_i(\lambda) \log p_i(\lambda)}{\log \lambda} \quad (6)$$

其中 $D(0)$ 称为容量维数, $D(1)$ 称为信息维数, $D(2)$ 称为相关维数。一般来说容量维数 $D(0)$ 就等于多重分形谱的极大值。

1.3 多重分形谱

研究一个物体的多重分形性的最好方法就是

考察它的奇异谱, 奇异谱是利用一种特殊指数来描述研究对象子集的分形特性。这里我们简单介绍多重分形谱的如下定义:

设概率密度分布函数 $p_i(\lambda)$ 满足幂律关系 $p_i(\lambda) \propto \lambda^{\alpha(i)}$, 其中 $\alpha(i)$ 称为 Hölder 指数, 它依赖于第 i 个小区间。如果对于所有的 i , $\alpha(i)$ 取值相同, 则说明所研究对象为单分形; 反之则为多重分形, 并把具有相同 α 值的小区间的数目记为 $N_\alpha(\lambda)$, 且有幂律关系 $N_\alpha(\lambda) \propto \lambda^{-f(\alpha)}$ 成立。将其与单分形公式 $N_\alpha(\lambda) \propto \lambda^{-D}$ 相比, 可以看出 $f(\alpha)$ 表示具有相同 α 值的子集的分形维数。一个复杂的分形体, 它的内部可以分为一系列不同 α 值所表示的子集, 这样 $f(\alpha)$ 就给出了这一系列子集的分形特征, 称函数 $f(\alpha)$ 为多重分形谱或奇异谱。当 $\tau(q)$ 与 $f(\alpha)$ 可微时, 有勒让德 (Legendre) 变换^[6,7]。

$$\begin{cases} \alpha(q) = \frac{d(\tau(q))}{dq} \\ f(\alpha) = q \cdot \alpha(q) - \tau(q) \end{cases} \quad (7)$$

它建立了独立变量 q 和 τ 及独立变量 α 和 f 之间的联系, 通常容易求出随 q 变化的 τ , 因此可以用方程组 (7) 来求得 $\alpha(q)$ 和 $f(\alpha(q))$, 使得 $f(\alpha)$ 相对 α 的图通过参数 q 来刻画。如果所研究的对象是单分形的, 则函数 $f(\alpha)$ 为一定值; 如果是多重分形, 则函数 $f(\alpha)$ 一般为单峰图像。将使 $f(\alpha) \geq 0$ 的区间记为 $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, 其中 $\alpha_{\min} = \frac{d\tau(q)}{dq}$

$|_{q \rightarrow +\infty}, \alpha_{\max} = \frac{d\tau(q)}{dq} |_{q \rightarrow -\infty}$ 且 $f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$ 。我们用三个参数来描述对象的多重分形程度, 分别为多重分形谱的极大值: $f_{\max} = f(\alpha_0)$, $\alpha_0 \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$; 谱的宽度即区间 $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ 的宽度 $W = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$; 第三个参数设为 B , 可用最小二次拟合求得, 具体方法如下:

在使谱函数 $f(\alpha)$ 取得最大值的 α_0 附近, 用最小二次拟合法, 拟合的二次函数设为

$$\tilde{f}(\alpha) = A(\alpha - \alpha_0)^2 + B(\alpha - \alpha_0) + C$$

其中参数 B 表示谱曲线 $f(\alpha)$ 的不对称性。当 $B = 0$ 时, 谱曲线是对称的; 当 $B > 0$ 时, 谱曲线的峰值偏右; 当 $B < 0$ 时, 谱曲线的峰值偏左。一般来说, 当 $f(\alpha)$ 最大值 f_{\max} 越大, 区间 $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ 的宽度 W 越大及谱曲线 $f(\alpha)$ 对称性越好时, 对象所呈现的多重分形性就越强。勒让德 (Legendre) 变换提供了多重分形谱的理论计算公式, 但在实际中是通

过计算机采集 q 与 $\tau(q)$ 的离散数据,所以一般要用公式 $f(\alpha) = \min_{-\infty < q < \infty} (\alpha \cdot q - \tau(q))$ 来计算谱函数,最后求得三个特征参量 f_{max} , W 和 B ,并作出多重分形谱的关系图。

2 数据分析及应用

交通流可用多个参数来描述,本文主要分析北京玉泉营快速路交通流量时间序列,原始数据来源于北京四通智能交通系统集成有限公司。图 1 给出了北京玉泉营快速路 2006 年 8 月 1 日 0 时 11 分到 8 月 5 日 0 时 11 分的交通流量变化曲线图。

图 2 是 $\log E(\omega) \sim \log \omega$ 关系图,是根据幂谱的定义公式(1),利用 matlab 编程(本文所有图形均利用 matlab 编程),得出交通流量时间序列幂谱与频率之间的关系,可以看出在时间区间 1 至 10 天内,幂谱符合幂律形式 $E(\omega) \propto \omega^{-\beta}$,且 $\beta = 1.7816$ 。在这一时间段内表现出交通流量时间序列的无标度性。因此以下的统计矩函数都是在无标度区间内分析的。

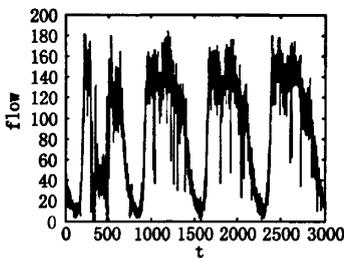


图1 交通流量变化曲线图
Fig.1 Figure of the traffic flow

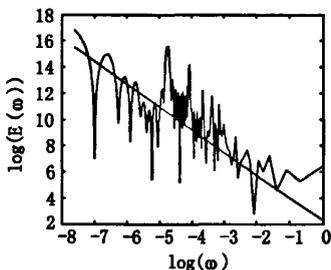


图2 $\log(E(\omega)) \sim \log(\omega)$ 关系图
Fig.2 Relation of $\log(E(\omega)) \sim \log(\omega)$

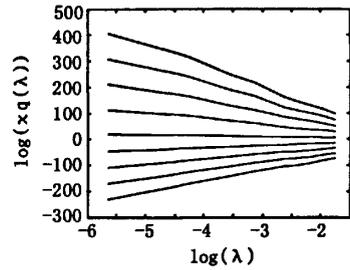


图3 $\log(x_q(\lambda)) \sim \log(\lambda)$ 关系图
Fig.3 Relation of $\log(x_q(\lambda)) \sim \log(\lambda)$

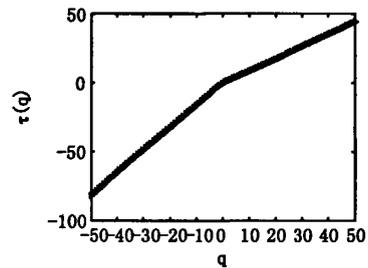


图4 $\tau(q) \sim q$ 关系图
Fig.4 Relation of $\tau(q) \sim q$

图 3 显示了 q 等于 $-50, -37, -24, -11, -2, 15, 28, 41$ 这 8 组值下的双对数关系图。可以看出,在整个尺度范围内, $\log x_q(\lambda)$ 与 $\log \lambda$ 之间都呈现了很好的线性关系,因此 $x_q(\lambda)$ 与 λ 满足幂律关系,即说明在规定的尺度变化范围内交通流量具有无标度性,也就是说交通流量具有分形的特性。

图 4 是依据公式(3)对 $\tau(q)$ 的定义,得到配分函数关系图,从中可以看出 $\tau(q)$ 是一个上凸的函数,即 $\tau(q)$ 与 q 之间存在着非线性关系,这也表明交通流量的确具有多重分形的特性。利用方程(5)可以计算出广义分形维数 $D(q)$,如图 5 所示,特别地,当 $q = 0$,所对应的容量维数 $D(0)$ 等于 0.9933。

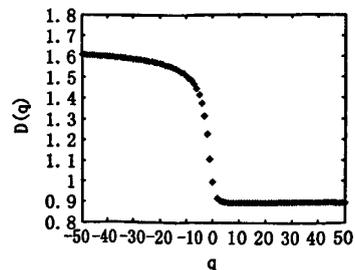


图5 $D(q) \sim q$ 关系图
Fig.5 Relation of $D(q) \sim q$

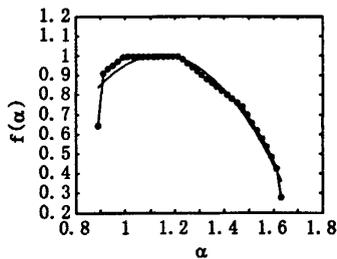
图6 $f(\alpha) \sim \alpha$ 关系图Fig.6 Relation of $f(\alpha) \sim \alpha$

图6是多重分形谱图,对于交通流量的多重

分形谱 $f(\alpha) = \min_{-\infty < q < \infty} (\alpha \cdot q - \tau(q))$ 。

用 $\alpha_{\min} = \left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty}$, $\alpha_{\max} = \left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty}$, 且

$f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$, 可以得到 $\alpha_{\min} = 0.8912$, $\alpha_{\max} = 1.6371$, 所以谱函数的宽度 $W = \alpha_{\max} - \alpha_{\min} = 0.7459$; 谱函数 $f(\alpha)$ 在 $\alpha_0 = 1.1112$ 处取到极大值, 为 $f_{\max} = f(\alpha_0) = 0.9933$, 这与容量维数 $D(0)$ 的值是相同的。谱曲线图像如图6中单峰粗曲线所示。在 α_0 处, 用最小二次拟合, 可得谱曲线 $f(\alpha)$ 的二次拟合函数 $\tilde{f}(\alpha) = -2.6547(\alpha - 1.1112)^2 + 0.1498(\alpha - 1.1112) + 1.0001$ 为一开口向下的抛物线, 如图6中细抛物线所示。从而得到交通流量多重分形谱的三个特征参数: 奇异谱的极大值 $f_{\max} = 0.9933$, 奇异谱的宽度 $W = 0.7459$ 以及谱曲线的不对称程度 $B = 0.1498$, 而较大的 f_{\max} , W 与较小的 B 也说明了交通流量的多重分形

性是比较明显的。

3 结论

1) 在无标度区间内, 统计矩对任意的阶数都是直线图, 这表明交通流量序列的无标度性。

2) 配分函数 $\tau(q)$ 和奇异谱 $f(\alpha)$ 的估算结果证实了交通流量具有较强的多重分形性质, 这更有利于以后的交通研究与预测。

参考文献:

- [1] PENG JIAN SHANG, XUE WEI LI. Chaotic analysis of traffic time series [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25(1): 121 - 128.
- [2] 马岩, 张莉, 关强. 干道主车流的分形描述和测度构成理论[J]. 交通运输工程与信息学报, 2004, 2(3): 13 - 15.
- [3] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature[M]. San Francisco: W H Feeman & Co., 1982.
- [4] 汪富泉, 李后强. 分形几何与动力系统[M]. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1993.
- [5] CHIARELLA C, HE X. A behavioural asset pricing model with a time - varying second moment[J]. Chaos, Solitons and Fractals 2006, 29(3): 535 - 555.
- [6] 曾文曲, 刘世跃, 戴连贵, 等. 分形几何 - 数学基础及其应用[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2001.
- [7] YU C X, GILMORE M. Structure function analysis of long - range correlations in plasma turbulence [J]. Physics of Plasmas, 2003, 7(10): 2772 - 2779.

(责任编辑 闫纯有)