

文章编号:1673-9469(2009)02-0007-06

抑制拉索振动主动控制力的判别准则实现

朱保兵

(上海建筑设计研究院有限公司,上海 200041)

摘要:拉索结构以其结构合理、外形美观在现代建筑中得到越来越多的应用,但特定的荷载条件往往会造成拉索振幅过大,从而严重影响了结构的安全。本文采用的轴向主动 LQR 控制达到了抑制拉索振动的目的。并在此基础上针对柔性张紧拉索振动控制系统进行了参数分析,着重讨论了控制过程中加权参数带来的影响,同时提出了适用于工程应用的最优主动控制力判别准则和实现该准则的迭代计算方法,有益于提高控制器的设计效率。

关键词:拉索振动;最优主动控制;LQR 控制;判别准则;迭代计算方法

中图分类号: TU311.3;TB53

文献标识码: A

Implementation of discrimination criterion on active control force for cables vibration

ZHU Bao-bing

(Shanghai Institute of Architectural Design and Research CO., LTD, Shanghai 200041, China)

Abstract: Cable-stayed structures are rational and beautiful. But cables are susceptible to vibration with large amplitude caused by special load. Then Structures will become more unsafe. Control of cables vibration is realized through linear quadratic optimal control strategy. Parametric analysis of vibration control system for flexible taut cables is conducted. The influences on vibration control are discussed due to the changes of weighted parameters. Discrimination criterion of optimal active control force and iterative computing method are given for improving design efficiency of the controller.

Key words: cables vibration; optimal active control; LQR control strategy; discrimination criterion; iterative computing method

拉索结构以其结构合理、外形美观在现代建筑中得到越来越多的应用,但特定的荷载条件往往会造成拉索振幅过大,从而严重影响了结构的安全,故需要一种有效的方法控制这种振动。

本文依据建立的柔性张紧拉索振动的主动控制模型,应用线性二次型最优控制(LQR)策略,在外部荷载作用下,实现了对拉索振动的主动控制。在此基础上,对控制系统进行了参数分析,着重讨论了控制过程中加权参数带来的影响,同时提出了适用于工程应用的最优主动控制力判别准则和实现该准则的迭代计算方法,有益于提高控制器的设计效率。

1 柔性张紧拉索振动的主动控制模型

对于索力较大的长拉索振动,其抗弯刚度 EI 的影响几乎可以不计,此时可以视为柔性张紧拉索^[1],其在外扰作用下的无阻尼偏微分运动方程为

$$m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - H^s \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1)$$

式中 $v(x, t)$ —拉索横向振动位移; H^s —静力平衡状态下拉索中初始预拉力; m —拉索的分布质量。

由于弹性体的各阶模态具有正交性,因此可以用模态分析理论^[2,3],方便地求得弹性体对外部激励的响应。可知方程(1)的解是系统各阶模态的

线性叠加

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) y_n(t) \quad (2)$$

式中 $V_n(x)$ —柔性张紧拉索横向振动的第 n 阶模态; $y_n(t)$ —反映第 n 阶模态幅值的广义坐标。

将式(2)代入方程(1),并在等号两边分别乘以 $V_k(x)$,沿索跨积分,可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[m y_n(t) \int_0^l V_n(x) V_k(x) dx - H^s \cdot y_n(t) \times \int_0^l V_n''(x) V_k(x) dx \right] = \int_0^l f(x, t) V_k(x) dx \quad (3)$$

令 $V_n(x) = A_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$, 正则化条件以及正交条件为

$$\begin{cases} m \int_0^l V_i(x) V_j(x) dx = 1 & i = j \\ \int_0^l V_i(x) V_j(x) dx = 0 & i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

代入式(3) 得出

$$V_k(x) = \sqrt{\frac{2}{ml}} \sin(\frac{k\pi x}{l}),$$

$$\alpha_k = - \int_0^l V_k''(x) V_k(x) dx = \frac{1}{m} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \quad (5)$$

如果沿拉索轴向施加最优主动控制力 $U(t)$, 当 $U(t) > 0$ 拉索中的张力增加; 当 $U(t) < 0$ 拉索中的张力减小。假设拉索在平衡位置附近做微幅振动, 高阶非线性项可以忽略不计^[4]。增加相应的模态阻尼项后, 得到有阻尼主动控制模态方程的矩阵表达形式为

$$y''(t) + 2\zeta\Omega y'(t) + \Omega^2 y(t) + \alpha U(t) y(t) = F(t) \quad (6)$$

式中 $y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}^T$ —拉索横向振动各阶模态幅值向量; ζ —柔性张紧拉索的模态阻尼比矩阵; $F(t) = [F_1(t), F_2(t), \dots, F_k(t)]^T$ —广义力矩阵; $F_k(t) = \int_0^l f(x, t) V_k(x) dx$ —作用在拉索上的第 k 阶广义模态力; $\Omega^2 =$

$$\frac{H^s}{m} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k^2 \end{bmatrix}$$
—柔性张紧拉索的固有频率; $\alpha = \frac{1}{H^s} \Omega^2$ —系数矩阵。

有频率; $\alpha = \frac{1}{H^s} \Omega^2$ —系数矩阵。

轴向主动控制力就是通过柔性张紧拉索的一端支座固定, 一端支座沿拉索轴向移动来实现的。其控制过程依赖于拉索振动的反应信息和外激励

荷载, 并利用很少的能量沿拉索轴向施加主动最优控制力, 在引起拉索横向刚度发生实时变化的同时, 使拉索振动的频率和阻尼比也发生了相应的变化, 从而达到减轻或降低拉索振动响应的目的。

2 抑制拉索振动的主动 LQR 控制策略

假设对柔性张紧拉索的第 1 阶模态进行主动控制, 令状态变量为 $x_1 = y_1, x_2 = \dot{y}_1$, 根据式(6) 可以得出张紧拉索振动控制系统的状态方程为

$$\dot{X} = AX + BU(t) + DF \quad (7)$$

系统的输出方程为

$$y_1 = CX \quad (8)$$

式中 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ —系统的状态向量;

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_{y_1}^2 & -2\zeta_{y_1} \omega_{y_1} \end{bmatrix}$ —系统的系数矩阵;

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha_1 x_1 \end{bmatrix}$ —系统的控制向量; $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ —

外力作用矩阵; $F = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1(t) \end{bmatrix}$ —广义力向量;

$C = \{1 \ 0\}$ —系统的输出向量。

为抑制拉索振动, 本文采用的线性二次型最优控制(LQR) 策略是通过最优控制原理求得各时刻轴向控制力 $U(t)$ 的大小。设 t_0 和 t_f 为初始和终止时刻, 取最优控制性能指标为^[5]。

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [X^T(t) Q X(t) + U(t) R U(t)] dt \quad (9)$$

式中 $X(t)$ —拉索振动控制系统的状态向量; $Q \in R^{n \times n}$ —半正定矩阵, $R \in R^{p \times p}$ —正定矩阵;

$\int_{t_0}^{t_f} X^T(t) Q X(t) dt$ —与结构的安全性能有关的结

构响应协方差, 是衡量结构安全性的指标;

$\int_{t_0}^{t_f} U(t) R U(t) dt$ —所施加控制力的协方差, 表示

控制系统所要输入的能量, 是衡量控制经济性的指标。

该目标函数为对象状态和控制输入的二次型函数。二次型问题就是在线性系统的约束条件下, 选择控制输入使得二次型目标函数达到最小。本文设 Q 和 R 分别为

$$Q = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = b \quad (10)$$

式中 a 和 b —待定参数。

采用 LQR 算法抑制拉索振动的轴向主动控制力是针对某组确定的控制参数 Q 和 R 而言的。权矩阵 Q 和 R 是两个重要的控制参数,它们决定了控制力和拉索振动响应的大小。由于 Q 和 R 对拉索振动响应和控制力具有很大的影响,因此,如何确定 Q 和 R 的最优形式和大小,以获得全局最优控制力,目前仍然是个难题。最优控制力的设计过程仍然是一个试算的过程,即要通过不断调整 Q 和 R 的形式和大小,以获得控制效果和主动控制力综合最优的控制力。

3 主动 LQR 控制的数值仿真

假设要对一段张紧的圆股钢丝绳的振动响应进行轴向主动控制。钢丝绳的计算参数如表 1 所示。

表 1 圆股钢丝绳的计算参数

Tab.1 Calculation parameter of round-strand rope

规格	长度 (m)	直径 (mm)	初始预拉力 (N)	单位质量 (kg/100m)
1×19	20	6	500	18.26

本文采用了适用范围更广的评价方法,即根据结构响应(位移、速度、加速度)均方根 RMS(Root Mean Square)的大小来间接地反映控制器对被控结构减振效果的贡献^[7]。拉索减振效果由对拉索全长全时程振动响应的 RMS 来反应,拉索位移的 RMS 为

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{\int_0^{t_f} \int_0^l v^2(x, t) dx dt}{t_f}} \quad (11)$$

式中 t_f —记录振动响应的总时间; $v(x, t)$ —拉索的位移响应。

拉索位移的均方差用广义位移 $y(t)$ 可以表达成如下形式:

$$\sigma_{displacement}^2(t) = E \left[\int_0^l v^2(x, t) dx \right] = E [y^T(t) M y(t)] \quad (12)$$

式中质量矩阵 $M = [m_{ij}] = \left[\int_0^l V_i(x) V_j(x) dx \right]$ —对称方阵; $V_i(x)$ 和 $V_j(x)$ —拉索横向振动的第 i 阶和第 j 阶模态函数。

采用非零的阻尼比后,随着控制输入的减少,拉索振动响应的 RMS 值将是一个有限值。

使拉索产生风雨激振现象的原因还没有被人们完全认识,其中包括空气动力、拉索上水线的运

动以及它们与拉索振动的耦合等等^[8]。所以,到目前为止还没有合适的模型能够很好地模拟这种行为。鉴于此种情况,文章中将在拉索上施加稳态高斯白噪声激励。取随机外部荷载的均方根 RMS 值为 2.520 2N,峰值为 9.317 9N,持荷时间 60 秒。当取参数 $a = 25\ 000, b = 1$ 时,拉索有控和无控第一阶模态位移时程和第一阶轴向主动控制力时程分别如图 1、图 2 所示。可以看出,轴向主动 LQR 控制可以有效地减小拉索在随机荷载作用下振动的模态位移响应。

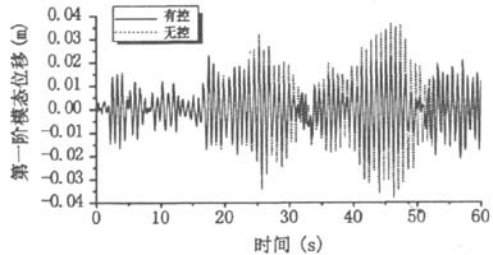


图1 第一阶模态位移时程

Fig.1 Time history of the first order modal displacement

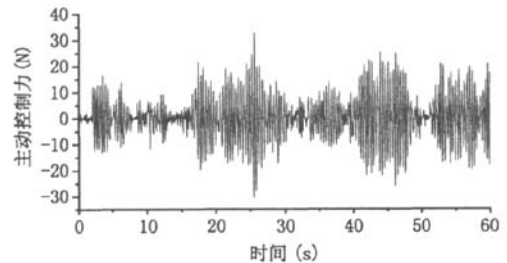


图1 轴向主动控制力时程

Fig.2 Time history of axial active control force

4 主动 LQR 控制的参数分析

当参数 a 和 b 取不同的值,柔性张紧拉索在上述随机荷载作用下的有控第一阶模态位移峰值和第一阶轴向主动控制力峰值,均记录在表 2 中。结果是 Q 越大,拉索振动响应越小,控制力越大; R 越大,则控制力越小,拉索振动响应越大。

表 2 中列出了参数 $b = 1, b = 2$ 和 $b = 3$ 三组工况。对比后得出如下结论,无论参数 a 和 b (即 Q 和 R 矩阵)取何值,只要 a/b 相同,则控制效果和主动控制力就相同。这说明拉索振动有控第一阶模态位移峰值和第一阶轴向主动控制力峰值仅与 a 和 b 的比值有关,而与 a 和 b 的绝对值无关。

设计时,可以借助计算机仿真软件显示所设计的闭环系统的响应特性。若不理想,调整加权矩阵 Q 和 R ,直到闭环特性满意为止。

表 2 拉索有控第一阶模态位移峰值和主动控制力峰值

Tab.2 Peak value of the first order controlled modal displacement and axial active control force

工况	轴向主动控制力峰值 (N)	有控模态位移峰值 (m)
无控	0	0.034 8
$a = 1\ 600$	5.941 7	0.030 9
$a = 4\ 800$	11.025 1	0.027 9
$a = 9\ 600$	15.460 7	0.025 7
$a = 16\ 000$	19.467 1	0.024 3
$a = 24\ 000$	23.389 5	0.023 5
$a = 33\ 600$	27.956 7	0.022 9
$a = 44\ 800$	32.562 9	0.022 3
$a = 57\ 600$	37.376 5	0.021 7
$a = 72\ 000$	42.103 1	0.021 1
$a = 88\ 000$	46.741 8	0.020 6
有控 $a = 105\ 600$ $b = 1$	51.293 0	0.020 1
$a = 124\ 800$	55.758 2	0.019 7
$a = 145\ 600$	60.139 2	0.019 5
$a = 168\ 000$	64.437 9	0.019 4
$a = 192\ 000$	68.656 8	0.019 2
$a = 217\ 600$	72.798 0	0.019 1
$a = 273\ 600$	80.856 8	0.018 8
$a = 304\ 000$	84.779 1	0.018 7
$a = 336\ 000$	88.632 9	0.018 5
$a = 48\ 000$ $b = 2$	23.389 5	0.023 5
$a = 264\ 000$ $b = 3$	46.741 8	0.020 6

再根据表中计算结果进一步分析拉索振动控制的效果随着参数值的变化而变化的趋势,不难发现,当参数 a 增大, Q 也增大,主动控制力峰值开始增大很快,然后增大速率变小,如图 3 所示;而相应的有控模态位移峰值开始减小很快,然后逐渐趋于平缓,如图 4 所示。说明主动控制力大小到达一定程度后,拉索振动控制效果就不再提升,所有很有必要寻找到最优的主动控制力。

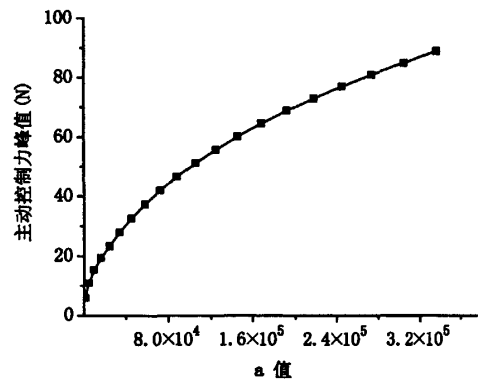


图 3 轴向主动控制力峰值和 a 的关系

Fig.3 Relationship between peak value of axial active control force and a

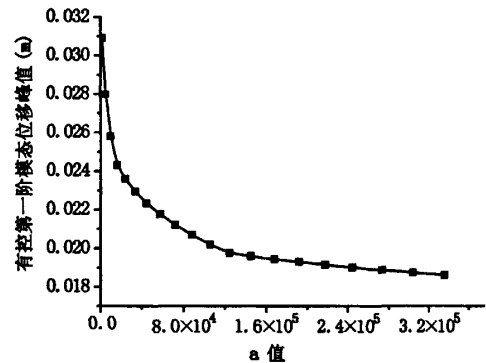


图 4 有控第一阶模态位移峰值和 a 的关系

Fig.4 Relationship between peak value of the first order controlled modal displacement and a

5 最优主动控制力的判别准则

根据上节算例的结果所做的图 5 中可以反映出,当拉索轴向主动控制力峰值为原索力的 5% 时,第一阶模态位移峰值减小约 33%;当拉索轴向主动控制力峰值为原索力的 10% 时,第一阶模态位移峰值减小约 42%。随着轴向主动控制力峰值的增大,第一阶模态位移峰值减小比例趋于平缓。

在此基础上,本文针对柔性张紧拉索振动响应的轴向主动控制,提出了轴向控制力的判别准则。由于工程中允许的误差为 5%,所以提出准则的前提条件是要求 $U_{\max}(t) \approx H^s \times 5\% \sim H^s \times 10\%$,也就是轴向主动控制力的峰值为拉索中初始预拉力的 5% ~ 10%,即可满足拉索振动主动控制的实际工程需要。

要在控制过程中施加满足上述判别准则的主

动最优控制力,则首先需要通过二分法^[9]迭代计算出相应的参数 a 和 b 值。由于控制效果和控制力仅与 a 和 b 的比值有关,那么假定参数 $b=1$ 不变,参数 $a=\zeta$ 时主动最优控制力的峰值为 $U_\zeta(t)$,且满足判别准则。当参数 a 取 p 时,主动最优控制力的峰值为 $U_p(t)$,当参数 a 取 q 时,主动最优控制力的峰值为 $U_q(t)$ 。

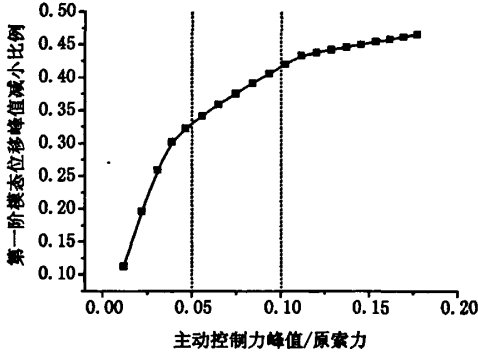


图 5 主动控制力峰值和位移减小比例的关系

Fig.5 Relationship between peak value of axial active control force and reduction rate of displacement

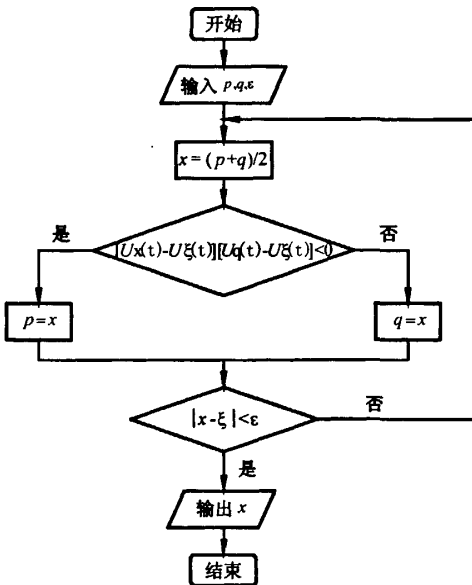


图 6 二分法求解参数 ξ 值的框图

Fig.6 Block diagram of dichotomy solving process for parameter ξ

微积分中的中值定理,也是二分法使用的前提条件是:最优控制力峰值 $U(t)$ 在区间 $[p, q]$ 上单调

连续, $U(t) - U_\zeta(t) = 0$ 在区间 $[p, q]$ 内有唯一的实根;并且满足 $[U_p(t) - U_\zeta(t)] \cdot [U_q(t) - U_\zeta(t)] < 0$, $U_p(t) - U_\zeta(t) < 0$, $U_q(t) - U_\zeta(t) > 0$ 。

二分法的基本思想,就是将方程根所在的区间平分两个小区间,再判断根属于哪个小区间;把有根的小区间再平分二,再判断根所在的更小的区间,对分;重复这一过程,最后求出所要的近似值。二分法求参数 ζ 值的框图如图 6 所示。图中, p, q 为区间端点, ϵ 为预先给定的允许误差限。整个迭代过程如下:

1) 参数取区间 $[p, q]$ 的中点 $\frac{p+q}{2}$, 若 $U_{\frac{p+q}{2}}(t) = U_\zeta(t)$, 则 $\frac{p+q}{2}$ 即为所要求的参数 ζ 。

2) 不然, 若 $U_{\frac{p+q}{2}}(t) > U_\zeta(t)$, 则令 $p_1 = p, q_1 = \frac{p+q}{2}$, 若 $U_{\frac{p+q}{2}}(t) < U_\zeta(t)$, 则令 $p_1 = \frac{p+q}{2}, q_1 = q$, 于是形成新区间 $[p_1, q_1]$, 其长度等于 $\frac{q-p}{2}$, 它包含所要求的参数 ζ 。

3) 再取 $[p_1, q_1]$ 的中点 $\frac{p_1+q_1}{2}$, 若 $U_{\frac{p_1+q_1}{2}}(t) = U_\zeta(t)$, 则 $\frac{p_1+q_1}{2}$ 即为所要求的参数 ζ 。

4) 不然, 若 $U_{\frac{p_1+q_1}{2}}(t) > U_\zeta(t)$, 则令 $p_2 = p_1, q_2 = \frac{p_1+q_1}{2}$, 若 $U_{\frac{p_1+q_1}{2}}(t) < U_\zeta(t)$, 则令 $p_2 = \frac{p_1+q_1}{2}, q_2 = q_1$ 于是又形成新区间 $[p_2, q_2]$, 其长度等于 $\frac{q_1-p_1}{2} = \frac{q-p}{2^2}$, 它包含所要求的参数 ζ 。

5) 若允许误差 $\epsilon = 10^{-k}$, 则按照这个过程作出区间 $[p_1, q_1], [p_2, q_2], [p_2, q_2], \dots, [p_n, q_n], n = \lceil \frac{k + \lg(q-p)}{\lg 2} \rceil$, 中括号表示取括号内数值的整数部分, 于是直到包含所要求的参数 ζ 的区间小到允许误差范围时, 二分结束, ζ 的近似值 $\tilde{\zeta}$ 为此区间的中点。 $\tilde{\zeta} = \frac{p_n+q_n}{2}, |\zeta-\tilde{\zeta}| \leq \frac{q-p}{2^{n+1}} \leq 10^{-k}$

6 结论

1) 仿真分析表明, 在外部随机荷载作用下, 轴向主动 LQR 控制可以有效地减小拉索振动的模态位移响应。

2) 参数分析的结果表明, 拉索振动控制的效

果随着参数值的变化而变化。当参数 a 增大, Q 也增大, 主动控制力峰值开始增大很快, 然后增大速率变小, 而相应的有控位移响应开始减小很快, 然后逐渐趋于平缓。说明主动控制力大小到达一定程度后, 拉索振动控制效果就不再提升, 所有很有必要寻找到最优的主动控制力。

3) 针对拉索振动控制的参数分析结果提出了适用于工程应用的最优主动控制力判别准则 $U_{\max}(t) \approx H^s \times 5\% \sim H^s \times 10\%$, 即轴向主动控制力的峰值为拉索中初始预拉力的 $5\% \sim 10\%$; 同时提出了通过逐步迭代实现最优主动控制力判别准则的方法。使得控制器的设计过程简化、设计效率提高。

参考文献:

- [1] 张运波. 单索及悬索桥的振动特性与参数分析[D]. 西南交通大学, 2001.
- [2] 朱保兵, 胡克强, 周煊廷. 双重迭代法在刚性拉索振动控制中的应用[J]. 河北建筑科技学院学报, 2005, 22

(3): 47-49.

- [3] 朱保兵, 李国强, 于洪刚. 刚性拉索横向振动控制的模态等效方法[J]. 合肥工业大学学报, 2006, 29(4): 475-477.
- [4] SUSUMPOW T. Dynamics of cable-structure systems and active control of cable by axial support motion [D]. Tokyo: Univ. of Tokyo, 1993.
- [5] 保宏, 段宝岩, 陈光达. 缓慢运动索振动主动控制研究[J]. 电子机械工程, 2004, 20(3): 62-64.
- [6] 陈水生, 秦鸣, 陈勇, 等. 斜拉桥拉索的振动及控制现场试验[J]. 长安大学学报, 2003, 23(2): 48-51.
- [7] 朱保兵. 拉索振动主动控制理论与试验研究[D]. 上海: 同济大学, 2006.
- [8] MAIN J A, JONES N P. Full-scale measurements of stay cable vibration. In Larsen, Larose, and Livesey (eds.) [C]. Wind Engineering into the 21st Century, Balkema, Rotterdam, 1999: 963-970.
- [9] (美) DAVID KINCAID, (美) WARD CHENEY. 数值分析(金凯德译)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.

(责任编辑 刘存英)

(上接第3页)

从图中可以看出: 随着曲率半径的减小, 最小梁高呈非线性增加趋势, 而最大跨高比呈非线性减小的趋势。曲率半径分别是 200m, 100m, 50m, 25m 时, 最大跨高比分别是 37.1, 31.8, 24.7, 22.3。通过二次多项式拟合得到的曲率半径与跨高比关系如下:

$$y = -0.0004x^2 + 0.1783x + 17.609$$

式中 x —曲率半径; y —最大跨高比, 该多项式在 $25 \leq x \leq 200$ 时成立。

4 结论

1) 分析计算结果表明, 静力作用下曲线型组合梁桥的位移随着曲率半径的减小呈非线性增长; 跨高比要随着曲率半径的减小而呈非线性减小。

2) 在与北京南站进站立交 FL16b 分联的相同设计条件下, 设计跨高比随着曲率半径的增大而

增大, 曲率半径在 25m~200m 范围内时, 二者的关系可以拟合为 $y = -0.0004x^2 + 0.1783x + 17.609$ 。

参考文献:

- [1] 袁建国. 钢-混凝土组合结构[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005.
- [2] 邢继胜, 李运生, 王元清. 北京南站进站立交钢-混凝土组合箱梁桥的设计与分析[J]. 工业建筑, 2008, 38(增刊): 1139-1148.
- [3] 江见鲸, 陆新征, 叶列平. 混凝土结构有限元分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [4] 刘德华, 金伟良, 刘斌. 独柱墩曲线梁桥中的支座分析[J]. 南京理工大学学报, 2006, 30(1): 113-116.
- [5] 彭栋木, 袁建国, 郭帅. 一曲线钢-混凝土组合梁桥设计与施工[J]. 市政技术, 2006, 24(6): 367-371.
- [6] JTG D62-2004, 公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范[S].

(责任编辑 刘存英)