文章编号:1673-9469(2009)03-0022-04

考虑索支座振动的索力识别研究

魏金波[1],段欣[2]
(1.同济大学 土木工程学院,上海 200092;2.南京工业大学 土木工程学院,南京 210009)

摘要:为了提高索力测试精度,考虑索的抗弯刚度和支座振动建立物理模型,导出了索的位移函数,进而得到索力和频率之间的关系,并分析了索的支座振动对索力动力检测的影响。研究结果表明:当索力较小时,考虑支座振动进行索力识别所得结果明显大于不考虑支座振动时的索力识别结果,但随着索力的增大,这种差别的趋势减小,不考虑支座振动将识别出不可接受的误差。

关键词:抗弯刚度;支座振动;索力识别;频率;动力分析
中图分类号: U448　　**文献标识码**:A

Estimation of cable tension frequency – based system identification method considering support vibration

WEI Jin-bo[1], DUAN Xin[2]
(1. Civil Engineering of Tongji University, Shanghai 200092; 2. Civil Engineering of Nanjing University of Technology, Jiangsu Nanjing 210009)

Abstract: In order to enhance the identification precision, the flexure stiffness and support vibration are considered to model the cable, and the model is analyzed to obtain the displacement function and the relationship between cable tension force and frequency. We carry out several studies which have demonstrated that if the cable tension is little, the cable tension force considering the support vibration will be larger than the force omitting the vibration, but along with cable tension increasing the discrepancy becomes less, so the model considering the support vibration can accurately model the cable structure.

Key words: flexure stiffness; support vibration; cable tension force identification; frequency; dynamic analysis

近几十年来,伴随国民经济的蓬勃发展,含索空间结构形式得到推广,被广泛地应用于斜拉桥、悬索桥、拱桥、桅杆结构、大跨屋面、玻璃幕墙等结构中。索力的变化使整体结构的形状和内力分布发生变化,并且可能给整体结构带来灾难性的后果,因此必须准确实时进行索力识别。现在对索力测定最常用的方法是间接测量法—振动法,也称为"频率法",即通过测定斜拉索自振频率,再由此实测频率依据计算公式反算出索力[1-4]。振动法测索力的研究成果已有很多,但在振动法的应用中,索力识别公式的精度有待于进一步提高。索抵抗横向变形的刚度由两部分组成,一部分是物理刚度 EI,即抗弯刚度,另一部分是由于张力产生的几何刚度,对于大部分正常使用中的索,或者较粗短的索,物理刚度的影响就不应被忽略。另外,现有索力识别公式中假定索两端固定,没有考虑索两端支座振动的影响。本文对此问题进行了研究,分析了考虑索抗弯刚度和支座振动对索力识别的影响。

1 索的振动特性

考虑了索的抗弯刚度后,索近似于一轴向受拉梁,假定索的垂跨比很小,忽略索在轴向的振

收稿日期:2009-03-09
作者简介:魏金波(1980-),男,山东临沂人,博士,从事钢索的动力检测。

动,假定索的两端铰接,考虑支座的振动,建立平面内竖向振动的运动方程

$$EI\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}-H\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}-h(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

式中 H - 索力;$h(t)$ - 由于振动引起的索力增量;EI - 索的抗弯刚度;m - 单位长度索的质量。

其初始条件为

$$v(x,0)=0 \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{3}$$

为了简便索振动特性的讨论,假定索端铰接且发生支座振动,则边界条件为

$$v(0,t)=a\sin w_0 t \qquad \left.\frac{d^2 v}{dx^2}\right|_{x=0}=0 \tag{4}$$

$$v(l,t)=b\sin w_l t \qquad \left.\frac{d^2 v}{dx^2}\right|_{x=l}=0 \tag{5}$$

索的形状可用以下抛物线方程表示

$$y=\frac{4d}{l}x(l-x) \tag{6}$$

式中 d - 索跨中的垂度,其大小介于介于简支梁在均部荷载下的挠度和无抗弯刚度的理想索垂度之间,即

$$\frac{5mgl^4}{384EI}<d<\frac{mgl^2}{H} \tag{7}$$

将式(6)代入式(1)可得

$$EI\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}-H\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=\frac{8d}{l^2}h(t) \tag{8}$$

定义一个新的独立变量 $u(x,t)$

$$v(x,t)=u(x,t)+ag_1(x)\sin w_0 t+bg_2(x)\sin w_l t \tag{9}$$

式中 $g_i(x)$—空间坐标的任意函数。

将式(9)代入式(1)得

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-H\frac{\partial^4 u}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-EI(ag_1^{(4)}(x)\sin w_0 t+bg_2^{(4)}(x)\sin w_L t)+\frac{8d}{l^2}h(t)+H(ag_1^{(2)}(x)\sin w_0 t+bg_2^{(2)}(x)\sin w_l t)-m(aw_0^2 g_1(x)\sin w_0 t+bw_l^2 g_2(x)\sin w_l t \tag{10}$$

将式(9)代入式(2)和式(3)其初始条件为

$$u(x,0)=0 \tag{11}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{12}$$

将式(9)代入式(4)和式(5)的前两式可得

$$u(0,t)=a\sin w_0 t-ag_1(0)\sin w_0 t-bg_2(0)\sin w_l t \tag{13}$$

$$u(l,t)=b\sin w_1 t-ag_1(l)\sin w_0 t-bg_2(l)\sin w_l t \tag{14}$$

确定函数 $g_i(x)$,使式(13)和式(14)右边部分为零可得

$$g_1(x)=\frac{x}{l} \qquad g_2(x)=\frac{l-x}{l} \tag{15}$$

将式(12)代入式(10)得

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-H\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-m\left(aw_0^2\frac{x}{l}\sin w_0 t+bw_l^2\frac{l-x}{l}\sin w_l t\right)+\frac{8d}{l^2}h(t) \tag{16}$$

由式(16)可知其右端项相当于作用在索上的外力。边界条件变为

$$u(0,t)=0 \qquad \left.\frac{d^2 u}{dx^2}\right|_{x=0}=0 \tag{17}$$

$$u(l,t)=0 \qquad \left.\frac{d^2 u}{dx^2}\right|_{x=l}=0 \tag{18}$$

相应于齐次方程、齐次边界条件的特征函数为 $\sin\frac{n\pi x}{l}$,对该定解问题的形式解可设为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{19}$$

式中 $T_n(t)$ - 待定函数。

显然式(19)满足边界条件。为了确定 $T_n(t)$,把自由项也按特征函数$\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$在$(0,l)$上展开成级数

$$-m\left(aw_0^2\frac{x}{l}\sin w_0 t+bw_l^2\frac{l-x}{l}\sin w_l t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n maw_0^2\frac{1}{n\pi}\sin w_0 t-mbw_1^2\frac{1}{n\pi}\sin w_l t+\frac{8d}{l^2}h(t)(1-(-1)^n)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{20}$$

将式(19)和式(20)代入方程(16)整理得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{EI}{m}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4-\frac{H}{m}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\right]T_n(t)+T_n^{\cdot\cdot}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n aw_0^2\frac{l}{n\pi}\sin w_0 t-bw_1^2\frac{l}{n\pi}\sin w_l t+\frac{8d}{n\pi l^2}h(t)(1-(-1)^n)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{21}$$

利用拉普拉斯变换得

$$T_n(t)=A_n\sin(w_n t)+B_n\cos(w_n t)+$$

$$\frac{(-1)^n a w_0^2 l}{n\pi(w_n^2-w_0^2)}\sin w_0 t-\frac{b w_l^2 l}{n\pi(w_n^2-w_l^2)}\sin w_l t+H(t)[1-(-1)^n] \tag{22}$$

式中 $w_n=\sqrt{\frac{H}{m}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2-\frac{EI}{m}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4}$，$H(t)$是由非齐次项$\frac{8d}{l^2}h(t)$所得的特解项。

由初始条件可得

$$B_n=0$$

$$A_n w_n+\frac{(-1)^n a w_0^3 l}{n\pi(w_n^2-w_0^2)}-\frac{b w_l^3 l}{n\pi(w_n^2-w_l^2)}=0 \tag{23}$$

因此可以得到

$$T_n(t)=\left[-\frac{(-1)^n a w_0^3 l}{n\pi w_n(w_n^2-w_0^2)}+\frac{b w_l^3 l}{n\pi w_n(w_n^2-w_l^2)}\right]\times \sin(w_n t)+\frac{(-1)^n a w_0^2 l}{n\pi(w_n^2-w_0^2)}\sin w_0 t-\frac{b w_l^2 l}{n\pi(w_n^2-w_l^2)}\sin w_l t+H(t)[1-(-1)^n] \tag{24}$$

将式(24)和式(19)代入式(9)可得

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}+a\frac{x}{l}\sin(w_0 t)+b\frac{l-x}{l}\sin(w_l t) \tag{25}$$

由上述分析可以看出，索的垂度只影响索的奇数阶振型，而对偶数阶振型，即使垂度很大，影响也很小，这与不考虑支座振动时的情况相同。

2 索力与频率关系

由索的振动特性可知，在索力识别过程中，可以忽略垂度的影响，则方程(1)变为

$$EI\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4}-H\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=0 \tag{26}$$

先假设索两端的振动频率与索的振动频率相等，分离变量，令

$$v(x,t)=V(x)e^{i\omega t} \tag{27}$$

则方程(26)的解为

$$V(x)=A\sin(\alpha x)+B\cos(\alpha x)+C\sinh(\beta x)+D\cosh(\beta x) \tag{28}$$

式中 A、B、C、D 为待定系数，$\alpha^2=(\zeta^4+\gamma^2)^{1/2}-\zeta^2$，$\beta^2=(\zeta^4+\gamma^2)^{1/2}+\zeta^2$，$\zeta^2=\frac{H}{EI}$，$\gamma^2=\frac{m\omega^2}{EI}$。

将式(28)代入边界条件可得

$$\left.\begin{aligned}&B+D=a\\&\sin(\alpha l)A+\cos(\alpha l)B+\sinh(\beta l)C+\cosh(\beta l)D=b\\&-B\alpha^2+D\beta^2=0\\&\alpha^2\sin(\alpha l)A+\alpha^2\cos(\alpha l)B-\beta^2\sinh(\beta l)C-\beta^2\cosh(\beta l)D=0\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

解得

$$A=\frac{\beta^2[\cos(\alpha l)a-b]}{\sin(\alpha l)(\alpha^2+\beta^2)}\quad B=\frac{a\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$C=\frac{[b-\cosh(\beta l)a]\alpha^2}{\sin h(\alpha l)(\alpha^2+\beta^2)}\quad D=\frac{a\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \tag{30}$$

由式(30)可得变形协调方程得到频率方程

$$b\beta^3\cos(\alpha l)\sinh(\beta l)-a\beta^2\cos(2\alpha l)\sinh(\beta l)+b\alpha^3\sin(\alpha l)\cosh(\beta l)-a\alpha^3\sin(\alpha l)=0 \tag{31}$$

若忽略索的支座振动，则边界条件式(30)变为

$$\left.\begin{aligned}&B+D=0\\&\sin(\alpha l)A+\cos(\alpha l)B+\sinh(\beta l)C+\cosh(\beta l)D=0\\&-B\alpha^2+D\beta^2=0\\&\alpha^2\sin(\alpha l)A+\alpha^2\cos(\alpha l)B-\beta^2\sinh(\beta l)C-\beta^2\cosh(\beta l)D=0\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

由式(32)可知，若 $v(x,t)$不恒为零，则 $\alpha l=n\pi$，$n=1,2,3\cdots$。根据式(19)中 α 的表达式，即可推出两端铰接且具有一定刚度的索的频率与拉力之间的关系式

$$H=4ml^2\left(\frac{f_n}{n}\right)^2-\frac{n^2\pi^2EI}{l^2} \tag{34}$$

n 为频率的阶数。如果还忽略索的抗弯刚度，所得的频率与拉力之间的关系式为

$$H=4ml^2\left(\frac{f_n}{n}\right)^2 \tag{35}$$

这与经典的张紧弦理论计算公式相吻合。

当索两端的振动为

$$v(0,t)=ae^{iw_0 t}\quad v(l,t)=be^{iw_l t} \tag{36}$$

设索的自振频率为 w_n，将式(36)展开为频率为 w_n 的傅立叶级数。

$$v(0,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}V_0\exp(iw_n t)$$

$$v(l,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}V_1\exp(iw_n t) \tag{37}$$

其中

$$V_0=\frac{w_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w_0}}a\exp(iw_0 t)\exp(-iw_n t)\mathrm{d}t=\frac{aw_0}{2\pi(w_0-w_n)}\left[\sin\frac{2\pi w_n}{w_0}+i\left(\cos\frac{2\pi w_n}{w_0}-1\right)\right]$$

$$V_l = \frac{w_l}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} a\exp(iw_l t)\exp(-iw_n t)\mathrm{d}t = \frac{aw_l}{2\pi(w_1 - w_n)}\left[\sin\frac{2\pi w_n}{w_l} + i(\cos\frac{2\pi w_n}{w_l} - 1)\right] \quad (38)$$

将式(28)改写为复数形式

$$V(x) = G_1\exp(i\alpha x) + G_2\exp(-i\alpha x) + G_3\exp(\beta x) + G_4\exp(-\beta x) \quad (39)$$

式中 G_1、G_2、G_3、G_4— 待定系数。

考虑边界条件可得

$$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = V_0$$

$$G_1\exp(i\alpha l) + G_2\exp(-i\alpha l) + G_3\exp(\beta l) + G_4\exp(-\beta l) = V_l$$

$$\alpha^2 G_1 + \alpha^2 G_2 + \beta^2 G_3 + \beta^2 G_4 = 0$$

$$\alpha^2 G_1\exp(i\alpha l) + \alpha^2 G_2\exp(-i\alpha l) + \beta^2 G_3\exp(\beta l) + \beta^2 G_4\exp(-\beta l) = 0 \quad (40)$$

由式(40)可以得出频率方程,进而可以得到索力识别公式。

3 算例

假定索单位长度质量为1.1kg/m,索长为2.035 m,索两端的振动幅值均为一个单位,其各阶频率值和用式(34)、式(35)和考虑支座振动三种方法识别出的索力值如表 1 所示。

表 1 索力识别结果比较

Tab.1 The comparison of the cable tension estimation

$f_1(H_z)$	$f_2(H_z)$	$f_3(H_z)$	$f_4(H_z)$	理想索/kN	考虑刚度/kN	考虑支座振动/kN
37.42	78.83	128.28	183.48	28.31	24.57	30.43
51.60	106.25	166.33	231.76	51.43	47.93	53.84
69.02	141.13	219.52	292.27	90.73	86.53	91.03
77.42	156.45	240.04	325.12	111.50	108.04	111.95

由索力识别结果比较可以看出,不考虑刚度时,索力识别结果明显大于考虑刚度时索力识别结果。当索力较小时,考虑支座振动进行索力识别所得结果明显大于不考虑支座振动时的索力识别结果,但随着索力的增大,这种差别的趋势减小。

4 结论

本文考虑索两端支座的振动,建立了位移方程,得出索的垂度只影响索的奇数阶振型,而对偶数阶振型,即使垂度很大,影响也很小,进而忽略索垂度的影响,得出了索的频率方程,如果不考虑索的支座振动将使识别结果出现不可接受的误差。

参考文献:

[1] 张开莹.钢索受力动力检测理论与实验研究[D].上海:同济大学,2005.

[2] 张宇鑫.大跨度张弦梁结构索力检测方法研究[R].上海:同济大学博士后研究工作报告,2006.

[3] 林元培.斜拉桥[M].北京:人民交通大学出版社,1994.

[4] 武 岳,沈世钊.索膜结构风振响应中的气弹耦合效应研究[J].建筑钢结构进展,2006,8(2):30-37.

[5] 郭向荣,陈 淮.弹性支承对斜拉桥拉索自振特性的影响[J].郑州工业大学学报,2000,21(1):34-36.

(责任编辑　刘存英)