文章编号:1673-9469(2009)04-0106-03

完全五部图 $K_{n,n,n,n,n}(n\equiv 1,5(\mathrm{mod}6))$的竞争数

霍京京
(河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038)

摘要:Opsut在1982年给出了任意图 G 的竞争数小于等于其边团覆盖数的结果。对于完全五部图 $K_{n,n,n,n,n}$,当 $n\equiv 1,5(\mathrm{mod}6)$时,本文首先构造一个极小的边团覆盖并从中得到其边团覆盖数,然后利用边团覆盖和竞争图之间的关系得到了其竞争数的一个新的上界,从而改进了由Opsut给出的完全五部图的上界。

关键词:边团覆盖;边团覆盖数;竞争图;竞争数;完全五部图 $K_{n,n,n,n,n}$
中图分类号: O157.5 **文献标识码**:A

Competition number of complete pentapartite graphs $K_{n,n,n,n,n}$ where $n\equiv 1,5(\mathrm{mod}6)$

HUO Jing-jing
(College of Sciences, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China)

Abstract: Opsut showed that, for any graph G, the competition number of G is less than or equal to the edge clique cover number of G in 1982. This paper constructs the edge clique cover of minimum size and give the edge clique cover number for the complete pentapartite graphs $K_{n,n,n,n,n}$ where $n\equiv 1,5(\mathrm{mod}6)$. Then the new bound for the competition number of $K_{n,n,n,n,n}$ is given by the relation of the edge clique cover and the competition graph, which improve the result of Opsut on the bound for the competition number of $K_{n,n,n,n,n}$.

Key words: edge clique cover; edge clique cover number; competition graph; competition number; complete pentapartite graphs $K_{n,n,n,n,n}$

1968年,Cohen[1,2]引入了一个与生态学相关的概念—竞争图,此后逐渐被学者们所重视,不仅被应用在生态学领域,还被广泛地应用在有噪信道上的通信、信道分配和建立复杂系统模型等诸多方面。

一个无向图 $G=(V,E)$称为有向图 $D=(V,A)$的竞争图 $C(D)$,如果 $G=(V,E)$满足如下的两个条件:(1) G 与 D 有相同的顶点集 V;(2)对于不同的两个顶点 $x,y\in V$,若存在一个顶点 $a\in V$,使得$(x,a),(y,a)\in A$,则$(x,y)\in E$。

Roberts[3]指出,对于任意图 G,如果加入足够多的孤立点,那么它将成为某个无环有向图的竞争图。这样的孤立点数的最小值称为图 G 的竞争数,记作 $k(G)$。同时,Roberts也指出竞争图的刻化与竞争数的计算是等价的。Opsut[4]从算法的角度论证了计算一个图的竞争数是 NP-困难的。但是,对于某些特殊图类中的图,很容易得到该图的竞争数。

图的竞争图和竞争数,与图的边团覆盖和边团覆盖数紧密相关。图 G 的一个团是指 $V(G)$中的一个子集 S,使得 $G[S]$是完全图。由 n 个顶点构成的团是在这 n 个顶点上的完全图,记作 K_n。图 G 的边团覆盖(简记为 ECC)是指 G 中的一个团族,使得 G 的每一条边都包含在族中某一个团里。图 G 的边团覆盖的最小基数称为 G 的边团覆盖数(简称为 ECC 数),记作 $\theta_e(G)$(文献[5])。

收稿日期:2009-09-21
基金项目:国家自然科学基金(10871058) 特约专稿
作者简介:霍京京(1980-),女,河北武安人,硕士,助教,从事运筹与优化、图论的研究。

Opsut[4]给出了对任意图 G,其竞争数满足不等式 $\theta_e(G)-|V(G)|+2\le K(G)\le\theta_e(G)$。Dutton 和 Brigham[6]证明了图 G 是某个有向图的竞争图当且仅当 $\theta_e(G)\le|V(G)|$,并且利用 ECC 刻化了无环有向图的竞争图的特性。

对于完全多部图的竞争数,目前已有的结论如下(文献[7]):

(1) $k(K_n)=1,k(K_{n,n})=n^2-2n+2,k(K_{n_1,n_2})=(n_1-1)(n_2-1)+1$。

(2) $k(K_{n,n,n})=n^2-3n+4(n\ge2)$。

下面将利用边团覆盖与竞争图的关系对完全五部图 $K_{n,n,n,n,n}(n\equiv1,5(\bmod 6))$的竞争数进行探讨。

1 完全五部图的极小边团覆盖

设完全五部图 $K_{n,n,n,n,n}(n\equiv1,5(\bmod 6))$的顶点集可分解为五个(非空)不交子集。

$A:=\{a_1,\cdots,a_n\},B:=\{b_1,\cdots,b_n\},C:=\{c_1,\cdots,c_n\},D:=\{d_1,\cdots,d_n\},E=\{e_1,\cdots,e_n\}$。

令 $*(i,j,l,k,m):=\{a_i,b_j,c_l,d_k,e_m\},1\le i,j,l,k,m\le n$,则 $*(i,j,l,k,m)$是 $K_{n,n,n,n,n}(n\equiv1,5(\bmod 6))$中的 K_5,注意到 $K_{n,n,n,n,n}$中有 n^5 个 K_5。于是构造一个团族。

$F':=\{*(i,j,l,k,m)\mid l=i+j-1(\bmod n),k=2i+j-2(\bmod n),m=3i+j-3(\bmod n),1\le i,j\le n\}$

式中 $1\le l,k,m\le n$;$|F'|=n^2$。

引理1 对于任意满足 $n\equiv1,5(\bmod 6)$的自然数 n,族 F'是 $K_{n,n,n,n,n}$的一个极小的边团覆盖,特别地,$\theta_e(K_{n,n,n,n,n})=n^2$。

证明:取 A 和 B 之间的任意一条边 a_ib_j,则 $a_i,b_j\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $l=i+j-1(\bmod n)$,$k=2i+j-2(\bmod n)$,$m=3i+j-3(\bmod n)$。取 A 和 C 之间的任意一条边 a_ic_l,则 $a_i,c_l\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $j=l-i+1(\bmod n)$,$k=i+l-1(\bmod n)$,$m=2i+l-2(\bmod n)$。取 A 和 D 之间的任意一条边 a_id_k,则 $a_i,d_k\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $j=k-2i+2(\bmod n)$,$l=k-i+1(\bmod n)$,$m=i+k-1(\bmod n)$。取 A 和 E 之间的任意一条边 a_ie_m,则 $a_i,e_m\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $j=m-3i+3(\bmod n)$,$l=m-2i+2(\bmod n)$,$k=m-i+1(\bmod n)$。

取 B 和 C 之间的任意一条边 b_jc_l,则 $b_j,c_l\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $i=l-j+1(\bmod n)$,$k=2l-j(\bmod n)$,$m=3l-2j(\bmod n)$。取 B 和 D 之间的任意一条边 b_jd_k,则 $b_j,d_k\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $2i=k-j+2(\bmod n)$,$2l=j+k(\bmod n)$,$2m=3k-j(\bmod n)$。由于 n 为不能被3整除的奇数,故 i,l,m 被唯一确定。取 B 和 E 之间的任意一条边 b_je_m,则 $b_j,e_m\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $3i=m-j+3(\bmod n)$,$3l=m+2j(\bmod n)$,$3k=2m+j(\bmod n)$。由于 n 为不能被3整除的奇数,故 i,l,k 被唯一确定。

取 C 和 D 之间的任意一条边 c_ld_k,则 $c_l,d_k\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $i=k-l+1(\bmod n)$,$j=2l-k(\bmod n)$,$m=2k-l(\bmod n)$。取 C 和 E 之间的任意一条边 c_le_m,则 $c_l,e_m\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $2i=m-l+2(\bmod n)$,$2j=3l-m(\bmod n)$,$2k=m+l(\bmod n)$。由于 n 为不能被3整除的奇数,故 i,j,k 被唯一确定。

取 D 和 E 之间的任意一条边 d_ke_m,则 $d_k,e_m\in*(i,j,l,k,m)\in F'$,其中 $i=m-k+1(\bmod n)$,$j=3k-2m(\bmod n)$,$l=2k-m(\bmod n)$。

从而 F'是 $K_{n,n,n,n,n}(n\equiv1,5(\bmod 6))$的一个边团覆盖。

由于 $K_{n,n,n,n,n}$中所有极大团的大小为5,我们可以断言 $K_{n,n,n,n,n}$的极小的 ECC 是由 K_5 构成的。由于 $|E(K_{n,n,n,n,n})|=10n^2$,并且一个 K_5 有10条边,故 $K_{n,n,n,n,n}$的任意一个 ECC 的大小至少是 n^2,即 $\theta_e(K_{n,n,n,n,n})\ge n^2$。由 $|F'|=n^2$ 可知,$\theta_e(K_{n,n,n,n,n})=n^2$,从而 F' 是 $K_{n,n,n,n,n}(n\equiv1,5(\bmod 6))$的一个极小的边团覆盖。

从上述的引理中可以看到,在所构造的极小边团覆盖 F'中任何的两个团之间没有重边。不仅如此,下面的引理将会看到,存在完全五部图 $K_{n,n,n,n,n}$的顶点的一个排序,使得从排序中的第 n+7 个顶点开始,每增加一个新的顶点,必然增加 F'中的一个新的 K_5。

引理2 对于任意满足 $n\equiv1,5(\bmod 6)$的自然数 n,标记 $K_{n,n,n,n,n}$的顶点为 $v_1,\cdots,v_{5n}$,且选择 K_5 $*_1,\cdots*_{4n-1}\in F'$,使得

$$*_1\cup\cdots\cup*_i\subseteq\{v_1,\cdots,v_{i+n+7}\}\tag{1}$$

式中 $1\le i\le4n-7$。

证明:按照如下的顺序标记 $K_{n,n,n,n,n}$的顶点

$v_1,\cdots,v_{5n}$有

$e_1,e_2,\cdots,e_n,d_1,d_2,d_n,c_1,c_2,c_n,b_1,a_1,b_n,b_2,a_n,a_2,b_3,d_3,c_3,d_{n-1},a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1},a_3,b_4,d_4,c_4,d_{n-2},a_{n-2},b_{n-2},c_{n-2},a_4,\cdots,b_{(n+1)/2},d_{(n+1)/2},c_{(n+1)/2},d_{(n+3)/2},a_{(n+3)/2},b_{(n+3)/2},c_{(n+3)/2},a_{(n+1)/2}$ (2)

令$v_1,v_2,\cdots v_{20+n}$如式(2),且$v_{8s+13+n}=b_{s+3}$, $v_{8s+14+n}=d_{s+3}$, $v_{8s+15+n}=c_{s+3}$, $v_{8s+16+n}=d_{n-s-1}$, $v_{8s+17+n}=a_{n-s-1}$, $v_{8s+18+n}=b_{n-s-1}$, $v_{8s+19+n}=c_{n-s-1}$, $v_{8s+20+n}=a_{s+3}$,其中$1\le s\le(n+1)/2-3$。现在从F'中选出K_5,且标记它们如下:

$*_1=\{a_1,b_1,c_1,d_1,e_1\}$,

$*_2=\{a_1,b_n,c_n,d_n,e_n\}$,

$*_3=\{a_1,b_2,c_2,d_2,e_2\}$,

$*_4=\{a_n,b_2,c_1,d_n,e_{n-1}\}$,

$*_5=\{a_2,b_n,c_1,d_2,e_3\}$,

$*_6=\{a_n,b_3,c_2,d_1,e_n\}$,

$*_7=\{a_2,b_1,c_2,d_3,e_4\}$,

$*_8=\{a_1,b_3,c_3,d_3,e_3\}$,

$*_9=\{a_n,b_1,c_n,d_{n-1},e_{n-2}\}$,

$*_{10}=\{a_{n-1},b_3,c_1,d_{n-1},e_{n-3}\}$,

$*_{11}=\{a_2,b_{n-1},c_n,d_1,e_5\}$,

$*_{12}=\{a_1,b_{n-1},c_{n-1},d_{n-1},e_{n-1}\}$,

$*_{13}=\{a_3,b_{n-1},c_1,d_3,e_5\}$,

$*_{14}=\{a_n,b_4,c_3,d_2,e_1\}$,

$*_{15}=\{a_2,b_2,c_3,d_4,e_5\}$,

$*_{16}=\{a_1,b_4,c_4,d_4,e_4\}$,

$*_{17}=\{a_n,b_n,c_{n-1},d_{n-2},e_{n-3}\}$,

$*_{18}=\{a_{n-2},b_4,c_1,d_{n-2},e_{n-5}\}$,

$*_{19}=\{a_3,b_{n-2},c_n,d_2,e_4\}$,

$*_{20}=\{a_1,b_{n-2},c_{n-2},d_{n-2},e_{n-2}\}$,

$*_{21}=\{a_4,b_{n-2},c_1,d_4,e_7\}$,

$\cdots,\cdots,\cdots$,

$*_{8s+6}=\{a_n,b_{s+3},c_{s+2},d_{s+1},e_s\}$,

$*_{8s+7}=\{a_2,b_{s+1},c_{s+2},d_{s+3},e_{s+4}\}$,

$*_{8s+8}=\{a_1,b_{s+3},c_{s+3},d_{s+3},e_{s+3}\}$,

$*_{8s+9}=\{a_n,b_{n-s+1},c_{n-s},d_{n-s-1},e_{n-s-2}\}$,

$*_{8s+10}=\{a_{n-s-1},b_{s+3},c_1,d_{n-s-1},e_{n-2s-3}\}$,

$*_{8s+11}=\{a_{s+2},b_{n-s-1},c_n,d_{s+1},e_{2s+2}\}$,

$*_{8s+12}=\{a_1,b_{n-s-1},c_{n-s-1},d_{n-s-1},e_{n-s-1}\}$,

$*_{8s+13}=\{a_{s+3},b_{n-s-1},c_1,d_{s+3},e_{2s+5}\}$,

$\cdots,\cdots$,

$*_{4n-14}=\{a_n,b_{(n+1)/2},c_{(n-1)/2},d_{(n-3)/2},e_{(n-5)/2}\}$,

$*_{4n-13}=\{a_2,b_{(n-3)/2},c_{(n-1)/2},d_{(n+1)/2},e_{(n+3)/2}\}$,

$*_{4n-12}=\{a_1,b_{(n+1)/2},c_{(n+1)/2},d_{(n+1)/2},e_{(n+1)/2}\}$,

$*_{4n-11}=\{a_n,b_{(n+7)/2},c_{(n+5)/2},d_{(n+3)/2},e_{(n+1)/2}\}$,

$*_{4n-10}=\{a_{(n+3)/2},b_{(n+1)/2},c_1,d_{(n+3)/2},e_2\}$,

$*_{4n-9}=\{a_{(n-1)/2},b_{(n+3)/2},c_n,d_{(n-3)/2},e_{n-3}\}$,

$*_{4n-8}=\{a_1,b_{(n+3)/2},c_{(n+3)/2},d_{(n+3)/2},e_{(n+3)/2}\}$,

$*_{4n-7}=\{a_{(n+1)/2},b_{(n+3)/2},c_1,d_{(n+1)/2},e_n\}$,

其中$1\le s\le(n+1)/2-3$。注意到都不同$*_i$。对于$i=1,\cdots,13$,很容易验证引理1成立。对于$i=14,\cdots,4n-7$,很容易得到$*_i$中最大的顶点标号至多为$i+n+7$。从而$*_1\cup\cdots\cup *_i\subseteq\{v_1,\cdots,v_{i+n+7}\}$成立,其中$1\le i\le 4n-7$。因此,该引理成立。

2 主要结论

利用给出的极小边团覆盖F'的特性来构造$K_{n,n,n,n,n}$的竞争图,从而得到$K_{n,n,n,n,n}$的竞争数的一个上界。

定理1 若任意的自然数n满足$n\equiv 1,5\pmod 6$,则$k(K_{n,n,n,n,n})\le n^2-4n+8$。

证明:由引理1.2可知,存在$K_{n,n,n,n,n}$的顶点的一个标号$v_1,\cdots,v_{5n}$和K_5 $*_1,\cdots,*_{4n-7}\in F'$,使得$*_1\cup\cdots\cup *_i\subseteq\{v_1,\cdots,v_{i+n+7}\}$,其中$1\le i\le 4n-7$。由于$|F'|=n^2$,所以在$F'\setminus\{*_1,\cdots,*_{4n-7}\}$中有$n^2-4n+7$个$K_5$,将其记为$T_1,T_2,\cdots,T_{n^2-4n+7}$。定义一个有向图$D$如下:

$$V(D)=\{v_1,\cdots,v_{5n}\}\cup\{z_0,z_1,\cdots,z_{n^2-4n+7}$$

$$V(D)=\bigcup_{i=1}^{4n-8}\{(x,v_{i+n+8})\mid x\in *_i\}\cup\{(x,z_0)\mid x\in *_{4n-7}\}\bigcup_{i=1}^{n^2-4n+7}\{(x,z_i)\mid x\in T_i\},$$

则这个有向图D是无环的。此外,对于每一个$i=0,1,\cdots,n^2-4n+7$,顶点z_i没有向外的弧,并且$(v_i,v_j)\in A(D)\Rightarrow i<j$。由 (下转第112页)

定理3 设 $H^{\perp}=0$, V_e 为 Hopf 代数 H 的伴随单模, $\{a_{ij} \mid 1\le i,j\le n_e\}$ 为由上所述的 He 的一组基,则 $W_e=span\{\sum_{j=1}^{n_e} a_{ji} \mid 1\le i\le n_e\}$ 为 H 的正则单模且有 H-模同构 $V_e\cong W_e$。

证明 因为 $a_{pq}\sum_{j=1}^{n_e} a_{ji}=\lambda\delta_{p,i}\sum_{j=1}^{n_e} a_{jq}\in W_e$, $1\le p,q\le n_e$,因此 W_e 为正则单模。令 $\sigma: V_e\to W_e$, $x_i\mapsto \sum_{j=1}^{n_e} a_{ji}$, $1\le i\le n$,则 σ 为 V_e 到 W_e 的双射。且

$$\sigma(ad_{a_{pq}} x_i)=\sigma(\lambda\delta_{p,i}x_q)=\lambda\delta_{p,i}\sum_{j=1}^{n_e} a_{jq}=a_{pq}\cdot\sum_{j=1}^{n_e} a_{ji}=a_{pq}\sigma(x_i)$$

因此, $\sigma: V_e\to W_e$ 为 H-模同构。

参考文献:

[1] 王志华,李立斌.Hopf 代数的 Killing 型[J].扬州大学学报(自然科学版),2006,9(3):9-12.

[2] ABE E. Hopf algebras[M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[3] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings [M]. Providence, R. I. : Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, 1993.

[4] 冯克勤,章璞,李尚志.群与代数表示引论[M].北京:中国科学技术大学出版社,2004.

[5] CURTIS C, REINER I. Representation theory of finite groups and associative algebras[M]. New York: Interscience Publishers, 1962.

[6] AUSLANDER M, REITEN I, SMA S. ,Representation theory of Artin algebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[7] KASSEL C. Quantum groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[8] LORENZ M. Representations of finite-dimensional Hopf algebras[J]. J. Alg. 1997, 188: 476-505.

[9] SWEEDLER M. Hopf algebras[M]. New York: W A Benjamin, Inc, 1969.

(责任编辑 刘存英)

(上接第108页)于 F' 中的每个团在 D 中有一个公共的外邻点,所以 $E(K_{n,n,n,n,n}\subset E(C(D))$。另一方面, D 中每个顶点的内邻域要么是 F' 中的一个团,要么是空集,于是 $E(K_{n,n,n,n,n})\supset E(C(D))$ 成立。因而 $C(D)=K_{n,n,n,n,n}\cup\{z_0,z_1,\cdots,z_{n^2-4n+7}$。从而我们有 $k(K_{n,n,n,n,n})\le n^2-4n+8$。

3 结语

本文提出了一种利用边团覆盖与竞争图的关系界定完全五部图的竞争数的新的方法。通过分析表明,利用本方法给出的当 $n\equiv 1,5(\mathrm{mod}6)$ 时的完全五部图的竞争数的上界 n^2-4n+8,改进了由 Oputs 给出的完全五部图的竞争数的上界 n^2,这进一步推进了对完全多部图的竞争数的理论研究。

参考文献:

[1] COHEN J E. Interval graphs and food webs: a finding and a problem [M]. California: Rand, 1968.

[2] COHEN J E. Food webs and Niche space [M]. Princeton: Princeton University Press, 1978.

[3] ROBERTS F S. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space [C] //Theory and applications of graphs: Proc Internat Conf, Western Mich Univ, Kalamazoo, Mich, 1976. New York: Spinger, 1978.

[4] OPSUT R J. On the computation of the competition number of a graph [J]. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 1982 (3): 420-428.

[5] KIM S R, SANO Y. The competition numbers of complete tripartite graphs [J]. Discrete Appl Math, 2008(156): 3522-3524.

[6] ROBERTS F S. Applications of edge coverings by cliques [J]. Discrete Appl Math, 1985(10): 93-109.

[7] DUTTON R D, BRIGHAM R C. A characterization of competition graphs [J]. Discrete Appl Math, 1983(6): 315-317.

(责任编辑 马立)

完全五部图Kn,n,n, n, n(n≡1,5(mod6))的竞争数

作者： 霍京京， HUO Jing-jing
作者单位： 河北工程大学,理学院,河北,邯郸,056038
刊名： 河北工程大学学报（自然科学版） ISTIC
英文刊名： JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)： 2009,26(4)

参考文献(7条)

1. COHEN J E Interval graphs and food webs:a finding and a problem[期刊论文]-California:Rand 1968

2. COHEN J E Food webs and Niche space[期刊论文]-Princeton,New Jersey:Princeton University Press 1978

3. ROBERTS F S Food webs,competition graphs,and the boxieity of ecological phase space[期刊论文]-New York:Spinger 1978

4. OPSUTR J On the computation of the competition number of a graph[外文期刊] 1982(03)

5. KIM S R;SANO Y The competition numbers of complete tripartite graphs[外文期刊] 2008(156)

6. ROBERTS F S Application of edge coverings by cliques[外文期刊] 1985(10)

7. DUITON R D;BRIGHAM R C A characterization of competition graphs[外文期刊] 1983(06)