文章编号:1673-9469(2009)04-0109-04

Killing 根非退化下 Hopf 代数的伴随表示

唐帅[1],王志华[2]
(1.泰州师范高等专科学校 数理系,江苏 泰州 225300;2.南京师范大学泰州学院 数学系,江苏 泰州 225300)

摘要:在 Hopf 代数的 Killing 型非退化的情形下,讨论了有限维 Hopf 代数的伴随表示。通过给定的基完全刻划了所有伴随单模的模作用,得到了 Hopf 代数上的正则单模与伴随单模之间的一一对应。

关键词:Hopf 代数;伴随表示;Killing 型
中图分类号:O153.3　文献标识码:A

The adjoint representations of Hopf algebras with non-degenerate Killing form

TANG Shuai, WANG Zhi-hua
(1. Department of Mathematics and Physics, Taizhou Teachers College, Taizhou 225300, China;
2. Department of Mathematics, Taizhou College, Nanjing Normal University, Taizhou 225300, China)

Abstract: In this paper, restriction to the Hopf algebras with non-degenerate Killing form and the adjoint representations of finite dimensional Hopf algebras are discussed. Based on given bases, the adjoint actions of Hopf algebras on all simple modules are explicitly described, and the one to one correspondence between the regular modules and the adjoint modules of Hopf algebras are also investigated.

Key words: Hopf algebra; adjoint representation; Killing form

一般地,Hopf 代数的伴随表示与正则表示是两个完全不同的表示,即使在半单条件下,这两种表示仍存在很大的差别。在文献[1]中,作者在有限维 Hopf 代数上引入 Killing 型的定义,讨论了 Killing 型的一些性质,并指出对于 Hopf 代数 H 的任一本原正交幂等元 e, $e\in H^{\perp}$,当且仅当 $ad_eH=0$。因此当 Hopf 代数 H 的 Killing 型非退化时,Hopf 代数 H 的任一单模在同构意义下都出现在其伴随表示分解式中。换言之,当 $H^{\perp}=0$ 时,Hopf 代 H 的正则表示的单模(正则单模)与伴随表示的单模(伴随单模)有着一一对应,且对应单模同构。本文的主要工作是以基的形式完全实现这种一一对应,并且完全刻划了 Hopf 代数 H 上的所有伴随单模的模作用。

本文中的 H 一律为特征 0 的代数闭域 k 上的有限维 Hopf 代数。Hopf 代数 H 的余乘法 $\triangle(a)=\sum a_1\otimes a_2$,反极元为 S,余单位为 ε。H 的对偶 Hopf 代数记为 H^*,群样元的集合记为 $G(H)$,H 的中心记为 $Z(H)$,左积分空间记为 $\int_H^l$。有关 Hopf 代数的基本知识可参阅文献[3,7,9],代数及 Hopf 代数的表示理论可参阅文献[4,5,6,8]。

1 引理

设 E 为半单 Hopf 代数 H 的全部中心本原幂等元的集合,H 作为代数有正则表示分解 $H=\bigoplus_{e\in E}He$,如果考虑 H 的伴随表示,则类似地有伴随表示分解 $H=\bigoplus_{e\in E}ad_eH$,但是 E 中存在某些元 e,使得 $ad_eH=0$。因此,和正则表示不同,Hopf 代数 H 的半单性不足以刻划其伴随表示的所有单模。但是 $ad_eH=0$,当且仅当 $e\in H^{\perp}$,参阅文献[1]。因此在 $H^{\perp}=0$ 的情形下,$ad_eH\neq 0$, $\forall e\in E$。此时 Hopf 代数 H 的伴随单模与正则单模之间有着一

收稿日期:2009-10-15
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771182)
作者简介:唐帅(1973-),男,江苏泰兴人,讲师,硕士,从事代数学的研究与教学。

一对应。可以说 Killing 型的非退化性实际上是伴随表示的半单性的一种等价刻划,Hopf 代数的半单性与 Killing 型的非退化性之间的区别,实际上是 Hopf 代数的正则表示与伴随表示之间的差异的一种表现。

设 $H^{\perp}=0, 0\neq V\subseteq H$ 为 Hopf 代数 H 的伴随单模。则存在唯一的 $e\in E$ 使得 $ad_e V=V$,我们把满足此关系的 V 记成 V_e 并设 $\dim V_e=n_e$。对于 V_e 的特征标,得出以下结论:

引理 1 设 $H^{\perp}=0$, V_e 为 Hopf 代数 H 的伴随单模,V_e 则的特征标 $\chi_{V_e}=(\frac{n_e e}{(e,e)},\cdot)$。

证明 由于 $H^{\perp}=0$,因此 $\delta:H\to H^*, a\mapsto(a,\cdot)$ 为双射。而 $\chi_{V_e}\in H^*$,故存在 $h\in H$,使 $\chi_{V_e}=(h,\cdot)$。因为 $\forall a,b\in H$, $\chi_{V_e}(ab)=\chi_{V_e}(ba)$,即 $(h,ab)=(h,ba)$,从而 $(ha,b)=(ah,b)$。由 b 的任意性及 $H^{\perp}=0$,有 $ha=ah$, $\forall a\in H$.因此 $h\in Z(H)$。同样由于 $H^{\perp}=0$, $\forall e\in E$, $(e,e)\neq 0$,不妨设 $h=\sum\limits_{e\in E}\frac{k_e e}{(e,e)}$,其中 $k_e\in k$。

一方面 $\chi_{V_e}(e')=\begin{cases}n_e & e'=e,\\ 0 & e'\neq e,\end{cases}$ 另一方面 $\chi_{V_e}(e')=(h,e')=\sum\limits_{e\in E}(\frac{k_e e}{(e,e)},e')=k_{e'}$。

比较两式可得 $\chi_{V_e}=(\frac{n_e e}{(e,e)},\cdot)$。

推论 1 设 $H^{\perp}=0$,则 $G(H^*)=\left\{(\frac{e}{(e,e)},\cdot)\mid e\in E\cap Ann_{Z(H)}\ker ad_t\right\}$。因此群 $G(H^*)$ 的阶 $(G(H^*))=\dim Ann_{Z(H)}\ker ad_t$。

证明 设 $\alpha\in G(H^*)$,以 α 为特征标的单模是一维的。由引理 1,存在 $e\in E$,使得 $\alpha=(\frac{e}{(e,e)},\cdot)$。另外,$\forall_c\in\ker ad_t$, $h\in H$,注意到 $(Z(H),\ker ad_t)=0$,因此

$$(\frac{e}{(e,e)}c,h)=(\frac{e}{(e,e)},ch)=$$

$$\alpha(ch)=\alpha(c)\alpha(h)=(\frac{e}{(e,e)},c)(\frac{e}{(e,e)},h)=0$$

即 $ec\in H^{\perp}=0$,从而 $e\in Ann_{Z(H)}\ker ad_t$。

反之,我们证明若 $e\in E\cap Ann_{Z(H)}\ker ad_t$,则 $(\frac{e}{(e,e)},\cdot)\in G(H^*)$。事实上,$\forall a,b\in H=Z(H)\oplus\ker ad_t$,设 $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$,其中 $a_1,b_1\in Z(H)$, $a_2,b_2\in\ker ad_t$,并设 $a_1=\sum\limits_{e'\neq e}k_{e'}e'+k_e e$, $b_1=\sum\limits_{e'\neq e}f_{e'}e'+f_e e$,这里 $k_e,f_e\in k$, $\forall e\in E$。于是

$$(\frac{e}{(e,e)},ab)=(\frac{e}{(e,e)},a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2)=(\frac{e}{(e,e)},a_1b_1)=\frac{1}{(e,e)}(e,\sum_{e'\neq e}k_{e'}f_{e'}+k_ef_ee)=\frac{k_ef_e}{(e,e)}(e,e)=k_ef_e$$

$$(\frac{e}{(e,e)},a)(\frac{e}{(e,e)},b)=(\frac{e}{(e,e)},a_1)\cdot(\frac{e}{(e,e)},b_1)=(\frac{e}{(e,e)},k_ee)(\frac{e}{(e,e)},f_ee)=k_ef_e。$$

因此,$(\frac{e}{(e,e)},ab)=(\frac{e}{(e,e)},a)(\frac{e}{(e,e)},b)$,即 $(\frac{e}{(e,e)},\cdot)\in G(H^*)$。

2 主要结果

设 $\dim V_e=n_e$, $x_1,x_2,\cdots,x_{n_e}$ 为 V_e 的一组基,记 $ad_h x_i=\sum\limits_{j=1}^{n_e}\alpha_{ji}(h)x_j$, $h\in H$, $\alpha_{ji}\in H^*$, $1\leq i,j\leq n_e$。

当 $h=1$ 时,有 $\alpha_{ij}(1)=\delta_{i,j}$(Kronecker 符号),即 $\varepsilon_{H^*}(\alpha_{ij})=\delta_{i,j}$。

由 $ad_{hl}x_i=ad_h(ad_l x_i)$,有 $\alpha_{ij}(hl)=\sum\limits_{s=1}^{n_e}\alpha_{is}(h)\alpha_{sj}(l)$, $\forall h,l\in H$,即 $\triangle_{H^*}(\alpha_{ij})=\sum\limits_{s=1}^{n}\alpha_{is}\otimes\alpha_{sj}$。于是 $\{\alpha_{ij}\mid 1\leq i,j\leq n_e\}$ 张成的空间为 H^* 的 n_e^2 维子余代数(矩阵余代数)我们把该子余代数记为 C_{V_e}。因为 $C_{V_e}^*\cong M_{n_e}(k)$,因此 C_{V_e} 为单子余代数,并且 V_e 为右 C_{V_e}-余模,余模结构映射为 $\rho:V_e\to V_e\otimes C_{V_e}$, $x_j\mapsto\sum\limits_{i=1}^{n_e}x_i\otimes\alpha_{ij}$。

因此 $H^{\perp}=0$ 时,H 上的伴随作用下的单模与 H^* 上的单余模有着一一对应。更一般的模与余模之间的关系可以参阅文献[2,9]。

定理 1 设 $H^{\perp}=0$, $\{V_e\mid e\in E\}$ 为 Hopf 代数 H 的全部互不同构的伴随单模,则映射 $\delta:H\to H^*$, $a\mapsto(a,\cdot)$ 把 H 中的单代数映为 H^* 中的单子余代数。

证明 由于 $H^{\perp}=0$, $\{V_e\mid e\in E\}$ 为 Hopf 代数 H 的全部互不同构的伴随单模,于是 $\{V_e\mid e\in E\}$ 为 H^* 的全部互不同构的单余模,从而 $\{C_{V_e}\mid e\in E\}$ 为 H^* 的全部单子余代数。由 H^* 的半单性,$H^*=$

$\oplus_{e\in E} C_{V_e}$。由于映射 $\delta: H\to H^*$，$a\mapsto(a,\cdot)$为双射，可设 $\alpha_{ij}=(a_{ij},\cdot)$，其中 $a_{ij}\in H$，$1\le i,j\le n_e$。因为 $ad_{He'}V_e=0$，$\forall e'\neq e$，因此对于 V_e 中的基元 x_i 有 $0=ad_{He'}x_i=\sum_{j=1}^{n_e}\alpha_{ji}(He')x_j=\sum_{j=1}^{n_e}(a_{ji},He')x_j$。于是 $(a_{ji},He')=0$，即$(a_{ji}e',H)=0$，从而 $a_{ji}e'=0$，$1\le i,j\le n_e$，$\forall e'\in E$ 且 $e'\neq e$。因此 $a_{ji}\in He$。故在映射 $\delta^{-1}:H^*\to H$ 下，$\delta^{-1}(C_{V_e})\subseteq He$。

另外 $H=\delta^{-1}(H^*)=\oplus_{e\in E}\delta^{-1}(C_{V_e})\subseteq\oplus_{e\in E}He=H$，从而 $\delta^{-1}(C_{V_e})=He$，因此 δ 把H中的单代数映为 H^* 中的单子余代数。

注 (1) 显然伴随单模 V_e 的特征标 $\chi_{V_e}=\sum_{i=1}^{n_e}\alpha_{ii}=(\sum_{i=1}^{n_e}a_{ii},\cdot)$，而由引理1知 $\chi_{V_e}=(\frac{n_e e}{(e,e)},\cdot)$，因此 $\sum_{i=1}^{n_e}a_{ii}=\frac{n_e e}{(e,e)}$。

(2) 因为 $x_i=ad_e x_i=\sum_{j=1}^{n_e}\alpha_{ji}(e)x_j=\sum_{j=1}^{n_e}(a_{ji},e)x_j$，因此$(a_{ji},e)=\delta_{i,j}$，而 $a_{ij}\in He$，于是$(a_{ji},1)=\delta_{i,j}$，$1\le i,j\le n_e$。

由于$\{\alpha_{ij}|1\le i,j\le n_e\}$为 C_{V_e} 的一组基，因此$\{a_{ij}|1\le i,j\le n_e\}$为 He 的一组基。下面我们借助于 C_{V_e} 的余代数结构给出 He 在基$\{a_{ij}|1\le i,j\le n_e\}$下的乘法法则。

引理2 设 $H^\perp=0$，$\{a_{ij}|1\le i,j\le n_e\}$为由上所述的 He 的一组基，则 $a_{ij}a_{pq}=\lambda\delta_{i,q}a_{pj}$，这里 $\lambda=\frac{n_e}{(e,e)}$，$1\le i,j,p,q\le n_e$。

证明 由于$\triangle_{H^*}(\alpha_{ij})=\sum_{s=1}^{n_e}\alpha_{is}\otimes\alpha_{sj}$，此式作用于 $a_{pq}\otimes a_{mn}$，有 $\alpha_{ij}(a_{pq}a_{mn})=\sum_{s=1}^{n_e}\alpha_{is}(a_{pq})\alpha_{sj}(a_{mn})$。即

$$(a_{ij},a_{pq}a_{mn})=\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})(a_{sj},a_{mn})。\qquad(1)$$

由式(1)变形得$(a_{ij}a_{pq},a_{mn})=(\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})a_{sj},a_{mn})$，因此$(a_{ij}a_{pq}-\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})a_{sj},a_{mn})=0$。

由于 a_{mn} 为 He 的任意基元，因此$(a_{ij}a_{pq}-\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})a_{sj},He)=0$，又因为 $a_{ij}a_{pq}-\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})a_{sj}\in He$，因此$(a_{ij}a_{pq}-\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})a_{sj},H)=0$，即

$$a_{ij}a_{pq}=\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})a_{sj}。\qquad(2)$$

将式(2)变换下标得

$$a_{mn}a_{ij}=\sum_{s=1}^{n_e}(a_{ms},a_{ij})a_{sn},\qquad(3)$$

另外式(1)变形亦有$(a_{mn}a_{ij},a_{pq})=(\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{mn})a_{is},a_{pq})$，同理可得

$$a_{mn}a_{ij}=\sum_{s=1}^{n_e}(a_{sj},a_{mn})a_{isj}。\qquad(4)$$

因此由式(3)、式(4)可得$\sum_{s=1}^{n_e}(a_{sj},a_{mn})a_{is}=\sum_{s=1}^{n_e}(a_{ms},a_{ij})a_{sn}$。比较系数有

$$(a_{nj},a_{mn})=(a_{mi},a_{ij}),\qquad(5)$$
$$(a_{sj},a_{mn})=0,s\neq n,\qquad(6)$$
$$(a_{ms},a_{ij})=0,s\neq i。,\qquad(7)$$

式(6)、式(7)表明$(a_{mn},a_{ij})=\delta_{m,j}\delta_{n,i}(a_{mn},a_{nm})$，代入式(2)得

$$a_{ij}a_{pq}=\sum_{s=1}^{n_e}(a_{is},a_{pq})a_{sj}=\delta_{i,q}(a_{ip},a_{pi})a_{pj}。\qquad(8)$$

另外式(5)即$(a_{nj}a_{mn},1)=(a_{mi}a_{ij},1)$，再结合式(8)有$(1,a_{mj})(a_{nm},a_{mn})=\delta_{j,m}(a_{ii},1)(a_{mi},a_{im})$，由注(2)，此式即为

$$\delta_{j,m}(a_{nm},a_{mn})=\delta_{j,m}(a_{mi},a_{im})。$$

特别地取 $j=m$，有$(a_{nj},a_{jn})=(a_{ji},a_{ij})$，$1\le i,j,n\le n_e$，由该式可得

$$(a_{mn},a_{nm})=(a_{ni},a_{in})=(a_{ij},a_{ji}),1\le m,n,i,j\le n_e。$$

因此，(a_{mn},a_{nm})为域 k 中定值，记之为 λ，于是式(8)为

$$a_{ij}a_{pq}=\delta_{i,q}\lambda a_{pj},\qquad(9)$$

同时由式(9)有$(\sum_{i=1}^{n_e}a_{ii})^2=\lambda\sum_{i=1}^{n_e}a_{ii}$，而由注(1)得 $\lambda=\frac{n_e}{(e,e)}$。

由上面的结果，我们得到单模 V_e 的伴随作用如下：

定理2 设 $H^\perp=0$，V_e 为 Hopf 代数 H 的伴随单模，$x_1,x_2,\cdots,x_{n_e}$ 为 V_e 的一组基，$\{a_{ij}|1\le i,j\le n_e\}$为由上所述的 He 的一组基，则 $ad_{a_{pq}}x_i=\delta_{p,i}\lambda x_q$，$1\le i,p,q\le n_e$。

证明 由引理2及注(2)，

$$ad_{a_{pq}}x_i=\sum_{j=1}^{n_e}\alpha_{ji}(a_{pq})x_j=\sum_{j=1}^{n_e}(a_{ji}a_{pq},1)x_j=\delta_{p,i}\lambda x_q,1\le i,p,q\le n_e。$$

定理3 设 $H^{\perp}=0$, V_e 为 Hopf 代数 H 的伴随单模, $\{a_{ij} \mid 1 \le i,j \le n_e\}$ 为由上所述的 He 的一组基,则 $W_e = span\{\sum_{j=1}^{n_e} a_{ji} \mid 1 \le i \le n_e\}$ 为 H 的正则单模且有 H-模同构 $V_e \cong W_e$。

证明 因为 $a_{pq}\sum_{j=1}^{n_e} a_{ji} = \lambda\delta_{p,i}\sum_{j=1}^{n_e} a_{jq} \in W_e$, $1 \le p,q \le n_e$,因此 W_e 为正则单模。令 $\sigma: V_e \to W_e$, $x_i \mapsto \sum_{j=1}^{n_e} a_{ji}$, $1 \le i \le n$,则 σ 为 V_e 到 W_e 的双射。且

$$\sigma(ad_{a_{pq}} x_i) = \sigma(\lambda\delta_{p,i}x_q) = \lambda\delta_{p,i}\sum_{j=1}^{n_e} a_{jq} = a_{pq}\cdot\sum_{j=1}^{n_e} a_{ji} = a_{pq}\sigma(x_i)$$

因此, $\sigma: V_e \to W_e$ 为 H-模同构。

参考文献:

[1] 王志华,李立斌.Hopf代数的 Killing 型[J].扬州大学学报(自然科学版),2006,9(3): 9-12.

[2] ABE E. Hopf algebras[M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[3] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings [M]. Providence, R. I. : Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, 1993.

[4] 冯克勤,章璞,李尚志.群与代数表示引论[M].北京:中国科学技术大学出版社,2004.

[5] CURTIS C, REINER I. Representation theory of finite groups and associative algebras[M]. New York: Interscience Publishers, 1962.

[6] AUSLANDER M, REITEN I, SMA S. , Representation theory of Artin algebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[7] KASSEL C. Quantum groups[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[8] LORENZ M. Representations of finite-dimensional Hopf algebras[J]. J. Alg. 1997, 188: 476-505.

[9] SWEEDLER M. Hopf algebras[M]. New York: W A Benjamin, Inc, 1969.

(责任编辑 刘存英)

(上接第108页)于 F' 中的每个团在 D 中有一个公共的外邻点,所以 $E(K_{n,n,n,n,n} \subset E(C(D))$。另一方面, D 中每个顶点的内邻域要么是 F' 中的一个团,要么是空集,于是 $E(K_{n,n,n,n,n}) \supset E(C(D))$ 成立。因而 $C(D) = K_{n,n,n,n,n} \cup \{z_0, z_1, \cdots, z_{n^2-4n+7}\}$。从而我们有 $k(K_{n,n,n,n,n}) \le n^2-4n+8$。

3 结语

本文提出了一种利用边团覆盖与竞争图的关系界定完全五部图的竞争数的新的方法。通过分析表明,利用本方法给出的当 $n \equiv 1,5(\mathrm{mod}6)$ 时的完全五部图的竞争数的上界 n^2-4n+8,改进了由 Oputs 给出的完全五部图的竞争数的上界 n^2,这进一步推进了对完全多部图的竞争数的理论研究。

参考文献:

[1] COHEN J E. Interval graphs and food webs: a finding and a problem [M]. California: Rand, 1968.

[2] COHEN J E. Food webs and Niche space [M]. Princeton: Princeton University Press, 1978.

[3] ROBERTS F S. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space [C] //Theory and applications of graphs: Proc Internat Conf, Western Mich Univ, Kalamazoo, Mich, 1976. New York: Spinger, 1978.

[4] OPSUT R J. On the computation of the competition number of a graph [J]. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 1982 (3): 420-428.

[5] KIM S R, SANO Y. The competition numbers of complete tripartite graphs [J]. Discrete Appl Math, 2008(156): 3522-3524.

[6] ROBERTS F S. Applications of edge coverings by cliques [J]. Discrete Appl Math, 1985(10): 93-109.

[7] DUTTON R D, BRIGHAM R C. A characterization of competition graphs [J]. Discrete Appl Math, 1983(6): 315-317.

(责任编辑 马立)

Killing根非退化下Hopf代数的伴随表示

作者： 唐帅， 王志华， TANG Shuai， WANG Zhi-hua
作者单位： 唐帅,TANG Shuai(泰州师范高等专科学校,数理系,江苏,泰州,225300)， 王志华,WANG Zhi-hua(南京师范大学泰州学院,数学系,江苏,泰州,225300)
刊名： 河北工程大学学报（自然科学版） ISTIC
英文刊名： JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING(NATURAL SCIENCE EDITION)
年，卷(期)： 2009,26(4)

参考文献(9条)

1. 王志华;李立斌 Hopf代数的Killing型[期刊论文]-扬州大学学报(自然科学版) 2006(03)

2. ABE E Hopf algebras[期刊论文]-Cambridge:Cambridge University Press 1980

3. Montgomery S Hopf algebras and their actions on rings[期刊论文]- 1993

4. 冯克勤;章璞;李尚志 群与代数表示引论[期刊论文]-合肥:中国科学技术大学出版社 2004

5. CURTIS C;REINER I Representation theory of finite groups and associative algebras[期刊论文]-New York:Interscience Publishers 1962

6. AUSIANDER M;RETTEN I;SMA S Representation theory of Artin algebras[期刊论文]-Cambridge:Cambridge University Press 1995

7. KASSEL C Quantum groups[期刊论文]-New York:springer-verlag 1995

8. LORENZ M Representations of finite-dimensional Hoof algebras[外文期刊] 1997(2)

9. SWEEDLER M Hopf algebras[期刊论文]-New York:W A Benjamin,Inc 1969

本文读者也读过(10条)