文章编号：1673-9469(2010)01-0099-04

复合Poisson风险模型下积分-微分方程的解

郭 红[1]，关树明[2]，李 波[3]

（1.空军工程大学 理学院数理系，陕西 西安 710051；2.华北煤炭医学院 基础部，河北 唐山 063000；3.华中师范大学 数学与统计学学院，湖北 武汉 430079）

摘要：破产论是风险论的核心内容，复合Poisson风险模型一直是破产论研究的热点。本文研究了带常利息力和两个红利Threshold策略的复合Poisson风险模型，在作者之前研究的基础上给出了该模型下的Gerber-Shiu期望折现罚金函数 $m(u,b)$ 所满足的积分-微分方程在 $\delta=0$ 时的解。

关键词：复合Poisson风险模型；常利息力；红利；Threshold策略；Gerber-Shiu期望折现罚金函数；积分-微分方程

中图分类号：O211.6　　文献标识码：A

Solution to the integral - differential of the compound Poisson risk model

GUO Hong[1], GUAN Shu-ming[2], LI Bo[3]

(1. College of Science, Air Force Engineering University, Shan Xi Xi'an 710051, China; 2. Department of Basic, North China Coal Medical College, Hebei Tangshan 063000, China; 3. School of Mathematics and Statistics, Central China Normal University, Hubei Wuhan 430079, China)

Abstract: Ruin theory is the core of risk theory, the compound Poisson risk model is always the hotspot area to be studied in ruin theory. This paper presented the compound Poisson risk model with two dividend Thresholds strategy and constant interest force and obtained the general solution to the integral - differential equation of the Gerber - Shiu expected discounted penalty function on the basis of the author's former studying when $\delta = 0$.

Key words: compound Poisson risk model; constant interest force; dividend; threshold strategy; Gerber - Shiu expected discounted penalty function; integral - differential equation

1 模型的提出

由于实际的重要性，红利策略越来越受到人们的关注。所谓的threshold策略是指，当盈余低于一个常数水平 b 时，不支付红利，一旦盈余超过 b，则以低于保费率（不计利息力的情况下）的速率连续支付红利，直到一次新的索赔发生，使盈余回落到水平 b 以下，则停止支付红利。有关此方面的研究参见文献[1]、[2]。

设 $\{X_1, X_2, \cdots\}$ 是 i,i,d 的正值连续型随机变量序列，表示相继的个体索赔额，有共同的分布函数：$P(x) = 1 - \overline{P(x)} = P\{X_1 \le x\}, x \ge 0$，概率密度函数 $p(x) = P'(x)$，以及Laplace变换 $p(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathrm{d}P(x)$，$\mu = E[X_1]$。以 $N(t)$ 记到时刻 t 为止的总索赔次数，$\{N(t), t \ge 0\}$ 为一独立于 $\{X_1, X_2, \cdots\}$ 的强度为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的Poisson过程。从而索赔到达的时间间隔随机变量序列 $\{T_1, T_2, \cdots\}$ 与 $\{X_1, X_2, \cdots\}$ 相互独立，且服从均值为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布，以 $S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ 记 t 时刻的累积索赔额，若 $N(t) = 0$，则 $S(t) = 0$。$\{S(t), t \ge 0\}$ 是一个复合Poisson过程。

假设保险公司的盈余每单位时间以常利息力 $\delta(\delta \ge 0)$ 获得利息，以 $U(t), t \ge 0$ 记保险公司在时刻 t 的盈余，则

收稿日期：2009-12-29
基金项目：国家自然科学基金项目资助(No:70871050)
作者简介：郭红(1981-)，女，河北邯郸人，助教，从事应用概率统计方面的研究。

$$U(t) = e^{\delta t}\left(u + c\int_0^t e^{-\delta s}\mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\delta T_k}X_k\right) = ue^{\delta t} + c\int_0^t e^{\delta(t-s)}\mathrm{d}s - \sum_{k=1}^{N(t)} e^{\delta(t-T_k)}X_k \tag{1}$$

或 $\mathrm{d}U(t) = c\mathrm{d}t - \mathrm{d}S(t) + \delta U(t-)\mathrm{d}t$

式中 c— 保费收取速率(简称保费率);$U(0) = u$— 初始盈余。

在本文中,我们在模型(1)的基础上引入两个红利 threshold:$0 = b_0 < b_1 < b_2 < b_3 = \infty$,使得当盈余介于 b_{i-1} 和 b_i 之间时,保费率为 $c_i, i = 1,2,3$,一般有 $c_1 > c_2 > c_3$。设 θ_i 为相应于c_i 的相对安全负荷,即:$c_i = (1+\theta_i)\lambda\mu$。为区别于模型(1),将两个红利 threshold 策略模型下的盈余记为 $U_b(t)$,相应地,破产时刻记为 T_b,破产前的瞬时盈余记为 $U_b(T_b-)$,破产时的赤字记为 $|U_b(T_b)|$。从而,模型(1)的修正盈余过程$\{U_b(t);t\geq 0\}$ 可表示为

$$dU_b(t) = c_i dt - dS(t) + \delta U_b(t-)dt, b_{i-1} \leq u < b, i = 1,2,3 \tag{2}$$

定义模型(2)下的Gerber-Shiu期望折现罚金函数为

$$m(u;b) = E[e^{-\alpha T_b}\omega(U_b(T_b-), |U_b(T_b)|)I_{\{T<\infty\}} | U_b(0) = u] \tag{3}$$

式中 $-\alpha(\alpha \geq 0)$— 折现率;$\omega(x,y), x\geq 0, y > 0$— 非负可测函数。

2 积分-微分方程的解

$\delta = 0$时,模型(2)的期望折现罚金函数 $m(u;b)$ 满足方程

$$m'(u;b) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i}m(u;b) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^u m(u-x;b)\mathrm{d}P(x) - \frac{\lambda}{c_i}\zeta(u), b_{i-1}\leq u < b_i, i = 1,2,3 \tag{4}$$

此为一分段线性积分-微分方程,以下的工作是给出方程(4)的一个解。

为此,设f为一实值黎曼可积函数,s 为一非负实数(或具有非负实部的复数),定义函数f的变换算子 T_s 如下。

$$T_s f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-s(y-x)}f(y)dy \tag{5}$$

后面用到时,都假定该积分收敛。

对于每个 $c_i, i = 1,2,3$,Lundberg 基本方程为

$$c_i s + \lambda p(s) - (\lambda+\alpha) = 0 \tag{6}$$

式中 $p(s)$— 密度函数 $p(x)$ 的 Laplace 变换,$p(x) = \int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{d}P(x)$;$\theta_i$— 相应于 c_i 的相对安全负荷。

文献[3]指出,方程的根总是存在的,记方程(6)的根为 $\rho_i, i = 1,2,3$,下面的定理是之前的研究结果。

定理1 设 c_i 和b_{i-1} 是模型(2)中给定的常数,函数 $h_i(u), u\geq b_{i-1}$ 满足 $T_{\rho_i}h_i(b_{i-1})$ 收敛。

(1)若可导函数 $v_i(u)$ 满足如下齐次积分-微分方程

$$v'(u) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i}v_i(u) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^{u-b_{i-1}} v_i(u-x)\mathrm{d}P(x), u\geq b_{i-1} \tag{7}$$

初始条件:$v_i(b_{i-1}) = 1, i = 1,2,3$,则

$$v_i(u) = \frac{1-\Psi_i(u-b_{i-1})}{1-\Psi_i(0)}e^{\rho_i(u-b_{i-1})}, u\geq b_{i-1}, i = 1,2,3 \tag{8}$$

(2)若可导函数 $\mu_i(u), u\geq b_{i-1}$ 是如下非齐次积分-微分方程

$$\mu'(u) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i}\mu_i(u) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^{u-b_{i-1}}\mu_i(u-x)\mathrm{d}P(x) - h_i(u), u\geq b_{i-1} \tag{9}$$

的解,且满足 $\mu_i(u)\sim o(e^{\rho_i u})(u\to\infty)$,则 $\mu_i(u)$ 是如下积分方程

$$\mu_i(u) = \Pi_i\int_0^{u-b_{i-1}}\mu_i(u-x)\mathrm{d}A_i(x) + T_{\rho_i}h_i(u), u\geq b_{i-1} \tag{10}$$

的解,且解 $\mu_i(u)$ 可表示为

$$\mu_i(u) = \frac{1}{1-\Pi_i}\int_0^{u-b_{i-1}} T_{\rho_i}h_i(u-x)\mathrm{d}G_i(x) + T_{\rho_i}h_i(u), u\geq b_{i-1}, i = 1,2,3 \tag{11}$$

其中分布函数 $A_i(x)$ 由其尾部定义。

$$\overline{A_i(x)} = 1 - A_i(x) = \frac{\int_x^\infty e^{-\rho_i(t-x)}\,\overline{P(t)}\mathrm{d}t}{\int_0^\infty e^{-\rho_i t}\,\overline{P(t)}\mathrm{d}t} = \frac{T_{\rho_i}\overline{P(x)}}{T_{\rho_i}\overline{P(0)}}, x\geq 0, i = 1,2,3 \tag{12}$$

$$\Pi_i = \frac{\lambda[1-p(\rho_i)]}{c_i\rho_i} = \frac{\lambda}{c_i}T_{\rho_i}\overline{P(0)}, i = 1,2,3 \tag{13}$$

$G_i(x)$ 是一复合几何分布函数,满足

$$G_i(x) = \sum_{k=0}^\infty (1-\Pi_i)\Pi_i^n A_i^{*n}(x), x\geq 0, i = 1,2,3 \tag{14}$$

A_i^{*n} 是 A_i 与其自身的 n 重卷积。

$b_{i-1}\leq u < b_i$ 时积分-微分方程的解为求解积分-微分方程(4),考虑如下形式的分段非齐次积分-微分方程

$$f'(u;b) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i}f(u;b) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^u f(u-x;b)\mathrm{d}P(x)$$

$g_i(u), b_{i-1} \le u < b_i, i = 1,2,3 \quad (15)$

其中 $g_i(u), b_{i-1} \le u < b_i, i = 1,2,3$ 是连续函数,且在 $u = b_{i-1}$ 处存在左极限。

我们定义方程(15) 的解是一连续的分段函数,且在 (b_{i-1}, b_i) 内可导,在 $b_{i-1}, i = 1,2,3$ 处存在右导数。

为求非齐次方程(15),考虑如下齐次积分 - 微分方程

$$q'(u;b) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i} q(u;b) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^u q(u-x;b)\mathrm{d}P(x), b_{i-1} \le u < b_i, i = 1,2,3 \quad (16)$$

初始条件 $q(0;b) = 1$

定理 2 分段齐次积分 - 微分方程(16) 的解可表示为

$$q(u;b) = \varphi_i(u) + k_i v_i(u), b_{i-1} \le u < b_i, i = 1,2,3 \quad (17)$$

其中 $\varphi_i(u) = \dfrac{1}{1-\Pi_i}\displaystyle\int_0^{u-b_{i-1}} \gamma_i(u-x)\mathrm{d}G_i(x) + \gamma_i(u), u \ge b_{i-1} \quad (18)$

$$\gamma_i(u) = \Pi_i\int_{u-b_{i-1}}^u q(u-x;b)\mathrm{d}A_i(x), u \ge b_{i-1}, i = 1,2,3 \quad (19)$$

系数 k_i 满足 $k_1 = 1, k_i = \varphi_{i-1}(b_{i-1}) + k_{i-1}v_{i-1}(b_{i-1}) - \gamma_i(b_{i-1}), i = 2,3 \quad (20)$

$v_i(u)$ 由式(8) 给出,函数 $A_i(x)$,及常数 Π_i 分别由前面的式(12)、式(14) 和式(13) 给出。

证明:文献[4] 已经证明了 $i = 1$ 的情况。对于 $i = 2,3$ 时,证明过程分以下三步:首先证明方程(16) 的解具有式(17) 的形式;其次证明式(17) 中 $\varphi_i(u)$ 的具有式(18) 的表达式;最后证明由式(20) 给出的系数 k_i 可保证方程(16) 的解,式(17) 在 $u = b_{i-1}$ 处连续,以下是具体的证明。

对于 $b_{i-1} \le u < b_i, i = 2,3$,将方程(16) 重写为

$$q'(u;b) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i} q(u;b) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^{u-b_{i-1}} q(u-x;b)\mathrm{d}P(x) - \frac{\lambda}{c_i}\int_{u-b_{i-1}}^u q(u-x;b)\mathrm{d}P(x) \quad (21)$$

将条件 $b_{i-1} \le u < b_i$ 放宽到 $u \ge b_{i-1}$,并令 $h_i(u) = \dfrac{\lambda}{c_i}\displaystyle\int_{u-b_{i-1}}^u q(u-x;b)\mathrm{d}P(x)$,则方程(21) 即为定理 1 中的方程(9)。

设 $\varphi_i(u)$ 是方程(10) 的解,从而方程(16) 的解可表示为

$$q_i(u) = \varphi_i(u) + k_i v_i(u), u \ge b_{i-1}, i = 2,3$$

其中 $v_i(u)$ 由式(8) 给定。可适当选取系数 k_i,使得解 $q_i(u)$ 在 b_{i-1} 处连续。

下面证明 $\varphi_i(u)$ 具有(18) 式的形式。

对于 $u \ge b_{i-1}$,由于 $h_i(u) = \dfrac{\lambda}{c_i}\displaystyle\int_{u-b_{i-1}}^u q(u-x;b)\mathrm{d}P(x)$,故

$$T_{\rho_i}h_i(u) = \frac{\lambda}{c_i}\int_0^\infty e^{-\rho_i(t-u)}\left[\int_{t-b_{i-1}}^t q(t-x;b)p(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{c_i}\int_0^{b_{i-1}} q(x;b)\int_u^\infty e^{-\rho_i(t-x)}p(t-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{c_i}\int_0^{b_{i-1}} q(x;b)T_{\rho_i}p(u-x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{c_i}\int_{u-b_{i-1}}^u q(u-x;b)T_{\rho_i}p(x)\mathrm{d}x$$

$$\because\ T_{\rho_i}p(x)\mathrm{d}x = \left[\int_0^\infty e^{-\rho_i t}(1-P(t))\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}A_i(x) = \frac{1-p(\rho_i)}{\rho_i}\mathrm{d}A_i(x)\Pi_i = \frac{\lambda[1-p(\rho_i)]}{c_i\rho_i}$$

$$\therefore\ T_{\rho_i}h_i(u) = \frac{\lambda}{c_i}\int_{u-b_{i-1}}^u q(u-x;b)\frac{1-p(\rho_i)}{\rho_i}\mathrm{d}A_i(x) = \Pi_i\int_{u-b_{i-1}}^u q(u-x;b)\mathrm{d}A_i(x) = \gamma_i(u)$$

即式(18) 得证。

对于 $i = 2,3$,选择 k_i,使 $q(u;b)$ 在 b_{i-1} 处连续,即

$$\lim_{u\to b_{i-1}^-} q(u;b) = \lim_{u\to b_{i-1}^+} q(u;b) = q(b_{i-1};b)$$

故有等式 $\varphi_{i-1}(b_{i-1}) + k_{i-1}v_i(b_{i-1}) = \varphi_i(b_{i-1}) + k_i v_i(b_{i-1}) = \gamma_i(b_{i-1}) + k_i$

即 $k_i = \varphi_{i-1}(b_{i-1}) + k_{i-1}v_{i-1}(b_{i-1}) - \gamma_i(b_{i-1})$,定理得证。

根据文献[4] 给出的相关结论,对于非齐次积分 - 微分方程

$$F'_i(u) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i}F_i(u) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^u F_i(u-x)\mathrm{d}P(x) - h_i(u), u \ge 0, i = 1,2,3 \quad (22)$$

其一般解可表示为

$$F_i(u) = f_i(u) + kq_i(u), u \ge 0, i = 1,2,3 \quad (23)$$

其中 $f_i(u) \sim o(e^{\rho_i u})(u \to \infty)$,且满足如下瑕疵更新方程

$$f_i(u) = \Pi_i\int_0^u f_i(u-x)\mathrm{d}A_i(x) + T_{\rho_i}h_i(u) \quad (24)$$

$$q_i(u) = \frac{1-\Psi_i(u)}{1-\Psi_i(0)}e^{\rho_i u}, u \ge 0 \quad (25)$$

其中 $\Psi_i(u)$ 是一复合几何分布的尾部,满足方程

$$\Psi'_i(u) = \frac{\lambda}{c_i}\int_0^u [1-\Psi_i(u-x)]\mathrm{d}P_i(x) - \frac{\lambda}{c_i}[1-\Psi_i(u)], u \ge 0$$

$c_i = \frac{c_i}{p(\rho_i)}$,分布函数 $P_i(x)$ 满足:$dP_i(x) = \frac{e^{-\rho_i x}dP(x)}{p(\rho_i)}$

式中 k—任意常数(参见文献[2],文献[4])。

定理3 设函数 $g_i(u)$,$b_{i-1} \le u < b_i$,在$[b_{i-1}, +\infty)$上有连续扩张,且 $T_{\rho_i}g_i(b_{i-1})$ 收敛,$i = 1,2,3$,则分段非齐次积分 - 微分方程(15)的一个解 $f(u;b)$ 可表示为

$$f(u;b) = \zeta_i(u) + l_i v_i(u), b_{i-1} \le u < b_i, i = 1,2,3 \quad (26)$$

其中 $$\zeta_i(u) = \frac{1}{1-\Pi_i}\int_0^{u-b_{i-1}} h_i(u-x)dG_i(x) + h_i(u), u \ge b_{i-1} \quad (27)$$

$$h_i(u) = \Pi_i\int_{u-b_{i-1}}^{u} f(u-x;b)dA_i(x) + T_{\rho_i}g_i(u), u \ge b_{i-1}, i = 1,2,3 \quad (28)$$

系数 l_i 满足:$l_3 = 0$,$l_i = \zeta_{i-1}(b_{i-1}) + l_{i-1}v_{i-1}(b_{i-1}) - h_i(b_{i-1})$,$i = 2,3$ (29)

v_i 由式(8)给定,$A_i(x)$,Π_i,$G_i(x)$ 分别由式(12)、式(13)和式(14)给定。

证明:$i = 1$时,令:$f_i(u) = \zeta_i(u)$,$k = k_1$,直接应用式(23)即可证明式(26)。对于 $i = 2,3$ 的情形,证明类似于定理2,当 $b_{i-1} \le u < b_i$ 时,将方程(15)重新改写为

$$f'(u;b) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i}f(u;b) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^{u-b_{i-1}} f(u-x;b)dP(x) - \frac{\lambda}{c_i}\int_{u-b_{i-1}}^{u} f(u-x;b)dP(x) - g_i(u) = \frac{\lambda+\alpha}{c_i}f(u;b) - \frac{\lambda}{c_i}\int_0^{u-b_{i-1}} f(u-x;b)dP(x) - \left[\frac{\lambda}{c_i}\int_{u-b_{i-1}}^{u} f(u-x;b)dP(x) + g_i(u)\right]$$

将条件 $b_{i-1} \le u < b_i$ 放宽到 $u \ge b_{i-1}$,并令

$$h_i(u) = \frac{\lambda}{c_i}\int_{u-b_{i-1}}^{u} f(u-x;b)dP(x) + g_i(u), u \ge b_{i-1}$$

在定理2中,令:$\varphi_i(u) = \zeta_i(u)$,余下的证明类似于定理2,证毕。

注意到,在定理3中,系数 l_1 未知,l_1 可通过解方程 $\zeta_2(b_2) + l_2v_2(b_2) - h_3(b_2) = 0$ 求得。

最后给出分段非齐次积分 - 微分方程(4)的解。在定理3中,若令 $g_i(u) = \frac{\lambda}{c_i}\zeta(u)$,$\zeta(u) = \int_u^{+\infty}\omega(u;x-u)dP(x)$,则有如下推论。

推论 若 $T_{\rho_i}\zeta(u)$,$i = 1,2,3$收敛,则$\delta = 0$时,模型(2)下的 Gerber - Shiu 期望折现罚金函数 $m(u;b)$ 所满足的分段非齐次积分 - 微分方程(4)的一个解可表示为

$$m(u;b) = m_i(u) + a_i v_i(u), b_{i-1} \le u < b_i, i = 1,2,3$$

其中 $$m_i(u) = \frac{1}{1-\Pi_i}\int_0^{u-b_{i-1}} h_i(u-x)dG_i(x) + h_i(u), u \ge b_{i-1}$$

$$h_i(u) = \Pi_i\int_{u-b_{i-1}}^{u} m(u-x;b)dA_i(x) + \frac{\lambda}{c_i}T_{\rho_i}\zeta(u), u \ge b_{i-1}, i = 1,2,3$$

$$a_3 = 0, a_i = m_{i-1}(b_{i-1}) + a_{i-1}v_{i-1}(b_{i-1}) - h_i(b_{i-1}), i = 2,3$$

$A_i(x)$,Π_i,$G_i(x)$ 和 $v_i(x)$ 分别由式(12)、式(13)、式(14)和式(8)给出。

注:系数的选取保证了方程(4)的解 $m(u;b)$ 在 $u = b_{i-1}$ 处的连续性。

参考文献:

[1] DE FINETTI B. Su unimpostazione alternative della theories collective del rischio[J]. Transactions of the XV International Congress of Actuaries, 1957(2):433 - 443.

[2] LIN X S, PAVLOVA K P. The compound Poisson risk model with a threshold strategy[J]. Mathematics and Economics, 2006 (38):57 - 80.

[3] GERBER H U, SHIU E S W. On the time value of ruin [J]. North American Actuarial Journal, 1998(2):48 - 78.

[4] SHELDON LIN X, GORDON E WILLMOT, STEVE DREKIC. The classical risk model with a constant dividend barrier: Analysis of the Gerber - Shiu discounted penalty function [J]. Mathematics and Economics, 2003(33):551 - 566.

[5] GERBER H U, SHIU E S W. On optimal dividend strategies in the compound Poisson model [J]. North American Actuarial Journal, 2006(10):76 - 93.

[6] GERBER H U. On the probability of ruin in the presence of a linear dividend barrier[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1981:105 - 115.

[7] LIN X S, WILLMOT G E. Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory [J]. Mathematics and Economics, 1999(25):63 - 84.

(责任编辑 刘存英)