

文章编号: 1673- 9469(2010) 03- 0100- 04

基于不动点理论的改进遗传算法

王红霞, 高瑞贞, 张京军

(河北工程大学 信息与电气工程学院 邯郸 056038)

摘要: 针对标准遗传算法收敛精度不高的缺陷, 把不动点理论引入遗传算法。将种群中的个体视为剖分中的点, 通过对解空间进行 J_1 剖分和整数标号得到个体承载单纯形的顶点标号信息; 利用该信息指导算法进行最优化搜索和收敛性判断。当种群个体的承载单纯形全部转化为全标单纯形时, 算法中止, 得出全局最优解。算例结果表明, 该算法具有很高的计算效率和稳定性。

关键词: 遗传算法; 不动点; J_1 剖分; 整数标号

中图分类号: TP301

文献标识码: A

Improved genetic algorithm based on fixed point theory

WANG Hong-xia, GAO Rui-zhen, ZHANG Jing-jun

(School of Information and Electronic Engineering, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China)

Abstract: The fixed point theory is introduced into the genetic algorithm to optimize the convergence precision of the standard genetic algorithm. The individual of the population is regarded as the triangulation of the point; hence the vertex label information of the individual simplex, which would guide the algorithm to the optimization researching and the convergence judgment, could be calculated with the J_1 triangulation and integer label. When the loading simplexes of individuals are transferred into the completely labeled simplexes, the algorithm will be terminated and the global optimal solution will be got. The results of a computing example show that the improved genetic algorithm is stable and efficient.

Key words: genetic algorithm; fixed point; J_1 triangulation; integer label

最优化的求解是管理学和运筹学中的一个核心问题, 遗传算法^[1]通过结合适者生存的原则和随机交换的思想, 成为一种搜索全局最优解的有效方法。然而在实际设计中, 由于遗传算法存在“未成熟”收敛以及收敛精度不高等方面的不足, 对于大范围、高精度的优化问题往往收效不佳。很多专家、学者对遗传算法进行了改进^[2-6], 江雷^[7]等探讨了使用弹性策略来维持群体的多样性, 使得算法跨过局部收敛的障碍; 戴晓明^[8]基于多种群遗传并行进化的思想, 对不同种群采用不同的遗传策略, 如变异概率、不同的变异算子等来搜索变量空间, 并利用种群间迁移算子来进行遗传信息交流。

本文引入不动点算法中的 J_1 剖分和整数标号过程, 试图改进遗传算法中求解函数极小值的问题。

1 不动点理论^[9]

不动点理论是拓扑学研究的著名成果, 许多应用问题都可以方便地表述为与之等价的不动点问题。

定义 设 X 是 n 维欧式空间 R^n 的一个子集, 如果对于 X 的每一点 x , 都确定了 X 的一点 $f(x)$ 与之对应, 记作 $f: X \rightarrow X$; 当 $x \in X$, 且 $x = f(x)$ 时, 称 x 是自映射 $f: X \rightarrow X$ 的一个不动点。

收稿日期: 2010- 05- 26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60875037)

特约专稿

作者简介: 王红霞(1985-), 女, 河北保定人, 硕士, 从事计算机应用技术方面的研究。

1.1 不动点转化

设 $f: R^n \rightarrow R^n$ 是 n 维欧氏空间 R^n 的一个连续自映射, 求 $x \in R^n$, 使目标函数 $f(x)$ 达到极小。 x^* 是 $f(x)$ 极值点的充分必要条件是该点的梯度为 0, 即 $\nabla f(x^*) = 0$ 。令 $g: R^n \rightarrow R^n, x \in R^n$, 构造函数 $g(x) = x - \nabla f(x)$, 于是求 $f(x)$ 梯度为零的点即为求 $g(x)$ 的不动点。

1.2 J_1 剖分

J_1 是 R^n 的一个单纯剖分。设 J_1^c 为 R^n 的奇整点集。若 $y^0 \in J_1^c, \pi$ 是 N 的一个置换, $s \in \{-1, +1\}^n$, 就以 $J_1^c(y^0, \pi, s)$ 记为 n 维单纯形 $\langle y^0, \dots, y^n \rangle$, 其中 $y^i = y^{i-1} + s_{\pi(i)} u^{\pi(i)}, i \in N$ 。记所有这样的 $J_1^c(y^0, \pi, s)$ 的集合为 J_1 。

在 J_1 剖分中取奇整点为中心定点集, 与之对称也可用偶整点作为中心顶点集构造类似的单纯剖分。

1.3 整数标号

给定 $f: R^n \rightarrow R^n$, 设 G 是 $f: R^n \rightarrow R^n$ 的一个单纯剖分, 按照式 (1) 确定的对应 $l: G^0 \rightarrow N_0 = \{0, \dots, n\}$ 为 R^n 的由 f 决定的整数标号。

$$l(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \{i \in N \mid f_i(x) < x_i\} = \emptyset \\ \max\{i \in N \mid f_i(x) < x_i\}, & \text{其余情形} \end{cases} \quad (1)$$

1.4 承载单纯形的确定

记 $x = (x_1, x_2), y^0 = 2[x_i/2] + 1, z = x - y^0$, 且 z 满足 $0 \leq z < u$; 设 π 是 N 的一个置换, 满足 $1 \geq s_{\pi(1)} z_{\pi(1)} \geq s_{\pi(2)} z_{\pi(2)} \geq 0$, 记为 $\alpha_0 = 1 > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 = 0$, 令 $\beta_i = (\alpha_i - \alpha_{i+1}), i \in N_0, N_0 = \{0, 1, 2\}$ 。就有 $\beta_i \geq 0, i \in N_0$ 并且 $\sum_{j \in N_0} \beta_j = 1; x = \sum_{i \in N_0} \beta_i y^i, \beta_i \geq 0, i \in N_0$, 并且 $\sum_{i \in N_0} \beta_i = 1$ 。根据 $y^{i+1} = y^i + s_{\pi(i)} u^{\pi(i)}$ 确定的 $\langle y^0, y^1, y^2 \rangle$ 是 x 在 J_1 中的承载单纯形。

2 基于不动点算法的改进遗传算法

不动点算法和遗传算法都是求解关于优化问题的方法。将不动点算法引入遗传算法中, 将种群中的个体视为剖分中的点 x , 通过对解空间进行 J_1 剖分和整数标号得到个体承载单纯形的顶点标号信息, 利用该信息指导算法进行最优化搜索。

2.1 编码

二进制编码不利于反映所求问题的特定信息, 计算效率低。实数编码则由于范围较广, 导致遗传算法的随机性增强, 稳定性减弱, 并且容易早熟。因此, 将承载单纯形的顶点及其编号信息引入个体的实数编码, 形式如下:

$$\{x_1 \dots x_n, y^0, \dots, y^n, z^0 \dots z^n, f_x\} \quad (2)$$

其中, x_i 一个体设计变量取值, $i \in (1, \dots, n)$; $y^i - x_i$ 的承载单纯形顶点, $i \in (0, \dots, n)$; $z^i - y^i$ 的整数标号; $f_x - x$ 对应的目标函数值。

2.2 适应度函数的选取

遗传算法依据个体适应度进行搜索, 适应度由优化问题目标函数转化而来; 本算法设计的目标是寻求全标单纯形, 依据个体所在承载单纯形的整数标号信息评价个体适应度。

2.3 算法初始化

首先将优化问题转化为不动点问题, 对自映射 $f: R^n \rightarrow R^n$ 进行单纯剖分, 然后设置种群大小, 随机生成初始代, 计算每个个体的承载单纯形, 并对单纯形的顶点进行整数标号, 计算个体对应的函数值信息。

2.4 交叉算子

交叉算子把两个父代个体加以替换重组, 是生成新个体的重要手段。对父代种群施加交叉算子, 操作过程分为:

(1) 按照个体承载单纯形的几乎全标棱标号信息进行分类。

(2) 属于不同类和不同承载单纯形的个体之间进行交叉操作。

2.5 变异算子

对父代种群施加均匀变异, 在不包含个体的单纯形中优先产生新个体。

2.6 增维算子

当遗传算法随机生成的个体或者繁殖算子产生的个体, 其承载单纯形的顶点标号维数 $m < n$ 时, 从该个体出发沿着相邻相同维数的单纯形进行搜索, 直至找到 n 维标号的单纯形。

2.7 选择算子

将繁殖算子产生的新个体和父代个体按“父子混合,杰出者选择策略”进行选择,确保优秀的基因能够继续遗传和繁衍。

2.8 种群多样性

种群多样性直接影响算法的性能。为避免出现超级个体,采用2种策略维持种群的多样性:

- (1) 由于相同承载单纯形中的个体相似,禁止相同承载单纯形的个体进行交叉操作,禁止出现相同个体;
- (2) 增维算子操作时,使用替换策略将搜索到的个体替换初始个体。

2.9 收敛判断准则

当种群中个体的承载单纯形全部成为全标单纯形时,算法终止计算,输出全标单纯形对应的 ϵ - 不动点。

3 算例分析

3.1 测试函数

为验证本文提出的算法的有效性,对多峰函数进行测试。函数为:

$$f: \min f(X) = 2x_1^2 - 1.05x_1^4 + \frac{x_1^6}{6} - x_1x_2 + x_2^2$$

$$-3 \leq x_1 \leq 3; -3 \leq x_2 \leq 3$$

f 是一个三峰驼背函数,在解空间有三个局部极小值点,其中 $(0, 0)$ 是全局极小值点,对应函数值为0。如图3所示。

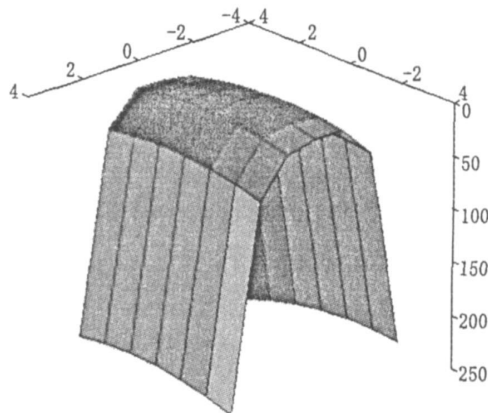


图1 多峰函数 f 的立体图

Fig.1 Graphic model of test function f

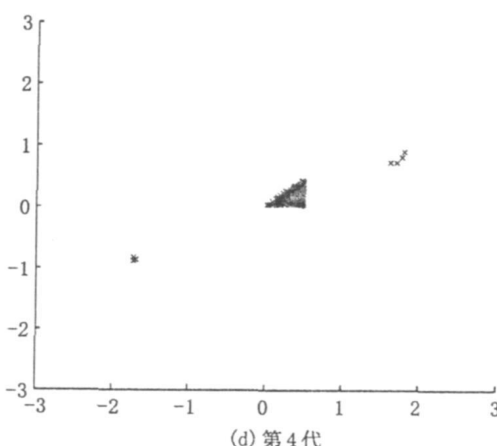
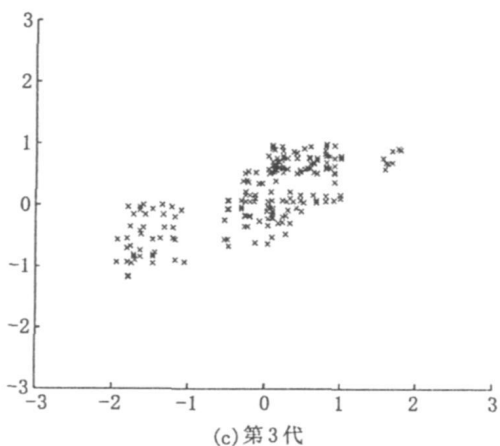
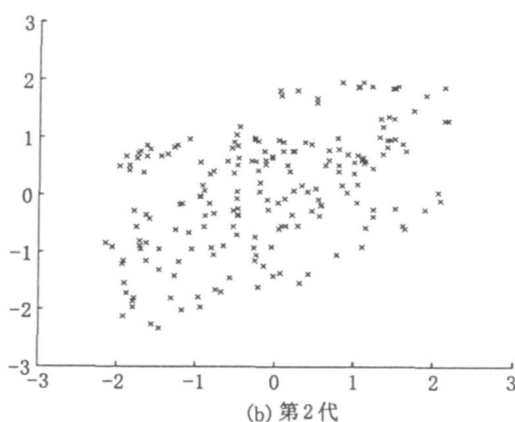
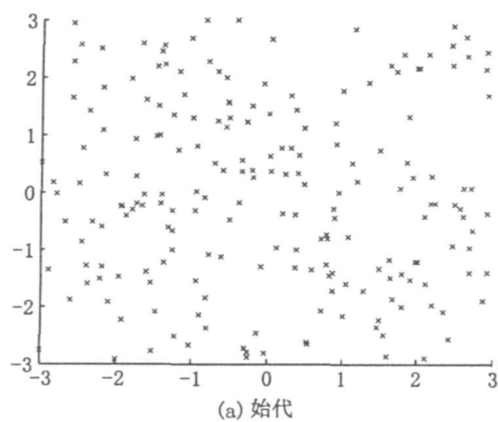


图2 函数 f 迭代图

Fig.2 The iterate population distribution of f

3.2 算法优化

首先将优化问题转化为不动点问题:

$$G: g(X) = X - \nabla f(X)$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x_1 - 4.2x_1^3 + x_1^5 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$-3 \leq x_1 \leq 3 \quad -3 \leq x_2 \leq 3$$

根据改进遗传算法流程,应用 VC++ 6.0 编写改进遗传算法程序。通过对种群反复施加繁殖算子,最终得到全局极小点(0.002 933, 0.001 662),函数值 0.000 015;利用 MATLAB 输出函数 f 的迭代过程,结果表明迭代过程在第 4 代即可完成(图 2)。

4 结论

把不动点算法中的 J_1 剖分和整数标号引入遗传算法,利用不动点算法中客观的收敛准则,可以有效地弥补遗传算法收敛受人为主观影响的缺陷。结果表明,改进后的遗传算法能使种群在有限代内达到包含全局最优解的状态,具有很高的计算效率和稳定性。

参考文献:

- [1] HOLLAND J. Adaptation in natural and artificial systems [M]. US: University of Michigan Press, 1992.
- [2] ARABAS J, MICHALEWICZ Z, MULA WKA J. GAVaPS- a

genetic algorithms with varying population size[C]// Proceedings of the 1st IEEE International Conference on Evolutionary Computation. Piscataway, US: IEEE Service Center, 1994.

- [3] 王小平, 曹立明. 遗传算法—理论应用与软件实现 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.
- [4] 陈琳, 黄杰, 龚正虎. 一种求解最小诊断代价的小生境遗传算法[J]. 计算机学报, 2005, 28(12): 2019-2026.
- [5] 张京军, 崔炜, 王南. 小生境遗传算法的多刚体系统动力学参数优化设计[J]. 机械工程学报, 2004, 40(3): 66-70.
- [6] 李京涛, 何丽丽, 高瑞贞, 等. 改进遗传算法在桁架拓扑优化中的应用[J]. 河北工程大学学报(自然科学版), 2009, 26(3): 19-21.
- [7] 戴晓明, 陈治纲, 冯瑞, 等. 基于改进模式提取变异算子的遗传算法[J]. 上海交通大学学报, 2002, 36(8): 1157-1160.
- [8] 江雷. 基于并行遗传算法的弹性 TSP 研究[J]. 微电子学与计算机, 2005, 22(8): 130-137.
- [9] 王则柯. 单纯不动点算法基础[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993.
- [10] 周杰, 王蕴恒, 潘洪亮. 基于遗传算法的小波神经网络 DTC 转速辨识[J]. 黑龙江科技学院学报, 2009, 19(3): 236-235.
- [11] 张春玉, 赵延林, 陈勇. 混合变量遗传算法在预应力网架结构中的应用[J]. 黑龙江科技学院学报, 2009, 19(4): 306-309.

(责任编辑 马立)