

文章编号: 1673- 9469(2010) 04- 0074- 04

## Lyapunov 指数在微弱信号检测中的应用

刘道文, 冯浩

(许昌学院 教育技术与信息部, 河南 许昌 461000)

**摘要:** 在基于 Duffing 混沌振子微弱信号检测中, 针对直观观察相图法和 Melnikov 法在判定系统状态上存在的不足, 为提高检测系统状态判定的准确性和信号检测的可靠性, 提出了利用 Lyapunov 指数定量地分析和判定系统的状态。在分析利用 Lyapunov 指数判定系统状态方法的基础上, 结合 Lyapunov 指数算法, 计算出 Duffing 系统的 Lyapunov 指数谱, 分析了系统内置驱动信号幅值、Lyapunov 指数及系统状态之间的关系, 结果表明, Lyapunov 指数能定量和准确地刻画系统的状态。

**关键词:** 混沌; 系统状态; 相变; 微弱信号

**中图分类号:** TP14

**文献标识码:** A

## Application of Lyapunov exponent in weak signal detection

LIU Dao-wen, FENG Hao

(Educational Technology & Informatin Department, Xuchang University, He'nan Xuchang 461000, China)

**Abstract:** Intuitionistic observations of phase and Melnikov have defaults in the judgment of system states in the weak signal detection based on the Duffing chaos oscillator. In order to improve the accuracy of the judgment of the system states and reliability of signal detection, this paper proposed the method that use Lyapunov exponent to quantitatively judge and to analyze the states of the detection system. The Lyapunov exponent spectrum of the Duffing system was computed on the basis of states of the system judging by Lyapunov exponent; the author also analyzed the relationship among the amplitude of the inner drive signal, Lyapunov exponent and the system states. The results showed that Lyapunov exponent can quantitatively and accurately judge the states of the detection system.

**Key words:** chaos; states of system; phase change; weak signal

利用 Duffing 混沌振子对系统参数极其敏感而对噪声免疫的特性, 可以检测出引入系统的待测微弱周期信号<sup>[1]</sup>, 其实质就是利用待测微弱周期信号实现混沌控制, 使系统的输出状态发生跃变。微弱的周期信号可以使处于大尺度周期临界状态的检测系统的相空间状态由混沌状态向大尺度周期状态跃变, 从而检测出微弱信号的存在, 这是当前基于混沌理论检测微弱信号的主要依据, 因此, 基于混沌理论微弱信号检测的一个关键的内容就是判定系统是处于混沌状态还是大尺度周期状态。当前, 判定动力系统的状态主要通过直观观察相图、Melnikov 解析计算等方法。直观观察相图

法可以简单、方便的判定系统的状态, 但该方法因缺乏严密理论判据而存在一定的主观性; Melnikov 法能计算出系统进入混沌状态的阈值, 但无法准确地计算出系统进入大尺度周期状态的阈值, 文献[2]利用 Melnikov 法计算出系统进入混沌状态的阈值后, 通过实验法确定系统进入大尺度状态的阈值。

Lyapunov 特性指数是衡量系统动力学特性的一个重要定量指标, 它表明系统在相空间中相邻轨道收敛或发散的指数率, 是判断和描述非线性时间序列是否为混沌系统的重要参数, 是区分系统处于混沌

收稿日期: 2010- 09- 01

基金项目: 河南省教育厅自然科学研究计划项目(2010A510011)

作者简介: 刘道文(1980- ), 男, 河南信阳人, 讲师, 硕士, 从事微弱信号检测、混沌控制与应用研究。

状态或非混沌状态的最直接的特征量之一<sup>[3]</sup>。本文提出通过 Lyapunov 指数定量地描述检测系统由混沌状态向大尺度周期状态的变化, 为检测出待测微弱周期信号提供可靠的依据。

### 1 系统状态判定方法

噪声背景中的微弱周期信号会使系统状态由混沌态向大尺度周期外轨转换发生相变, 这是当前混沌检测的主要依据, 也被认为是根据参数敏感性进行检测, 其原理方程就是 Holmes 型 Duffing 方程<sup>[4]</sup>

$$x''(t) + kx'(t) - x^3(t) + x^5(t) = f_r \cos t \quad (1)$$

式中  $k$ —阻尼比;  $f_r$ —周期策动力。

研究表明, 当  $k$  固定,  $f_r$  从 0 逐渐增加时, 该方程的解会经历同宿轨道、倍周期分岔、混沌轨迹、临界周期轨迹、大尺度周期等各个状态<sup>[5]</sup>。且当  $f_r$  超过一定阈值时, 系统状态迅速从混沌态变为大尺度周期态, 此时的相轨迹状态改变对同频率的信号非常敏感, 微小的幅值增量即能促成相轨迹明显变化(如图 1 所示), 而对不同频率的信号和噪声具有很强的免疫力。

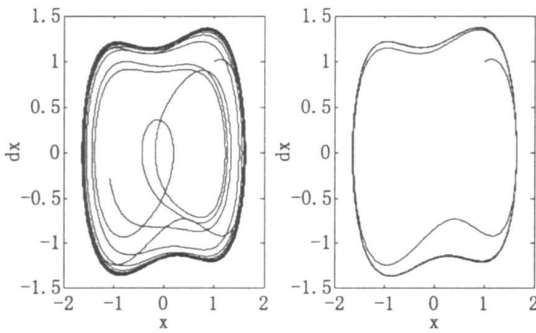


图1 Duffing系统的相变

Fig.1 Phase change of the Duffing system

通过分析 Duffing 系统的 Lyapunov 指数, 可以清楚的判断混沌检测系统瞬间动力学运动状态, 从而确定待测信号的存在, 以及较为准确地找到系统状态转变与待测信号幅值参数的关系。

应用 Lyapunov 指数可以较准确地确定混沌检测系统的状态。对于二维连续动力系统, 当混沌检测系统处于混沌临界状态时, 系统的两个 Lyapunov 指数其中之一为 0 值, 在大尺度周期状态下, 两个 Lyapunov 指数均为负值, 在混沌状态下, 系统的两个 Lyapunov 指数至少有一个正值<sup>[6]</sup>。对于三维连续动力系统情形<sup>[7]</sup>, 同理归纳见表 1。

表 1 Lyapunov 指数与系统状态

Tab.1 Lyapunov exponent and the system's state

Lyapunov 指数	数据符号	系统相图状态
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	(-, -, -)	不动点
	(0, -, -)	极限环
	(0, 0, -)	二维环面
	(+, +, 0)	不稳定极限环
	(+, 0, 0)	不稳定二维环面
	(+, 0, -)	奇怪吸引子

### 2 Lyapunov 指数算法

#### 2.1 Jacobian 法

目前计算 Lyapunov 指数的数值方法除了定义法外, 大体上分为两大类: Wolf 法和 Jacobian 法。Jacobian 法适用于噪声较大的系统, 切空间中向量的演变接近线性<sup>[8]</sup>, 是一种在实际应用中发展起来的计算 Lyapunov 指数的方法。

考虑下面的微分方程系统

$$\dot{x} = F(x) \quad (2)$$

其中  $x = \frac{dx}{dt}$ ,  $x \in R^m$ 。切空间中点  $x(t)$  处的切向量  $e$  的演化表示为

$$\dot{e} = J(x(t)) e, J = \frac{\partial F}{\partial x} \quad (3)$$

这里  $J$  是  $F$  的 Jacobian 矩阵。对于三维连续动力系统<sup>[6]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = f_1(x_n + y_n + z_n) \\ \dot{y}_{n+1} = f_2(x_n + y_n + z_n) \\ \dot{z}_{n+1} = f_3(x_n + y_n + z_n) \end{cases} \quad (4)$$

的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_n} & \frac{\partial f_3}{\partial y_n} & \frac{\partial f_3}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(3)的解能够表示为

$$e(t) = U(t, e(0)) \quad (6)$$

其中  $U: e(0) \rightarrow e(t)$  是线性算子映射。这个映射  $U$  的渐近行为可用指数刻画为

$$\lambda(x(0), e(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|e(t)\|}{\|e(0)\|} \quad (7)$$

所以, 由式(2)构成的系统的 Lyapunov 指数可以描述为上述重复过程的平均数<sup>[7]</sup>。

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \Delta t} \ln \frac{\|e((j+1)\Delta t)\|}{\|e(j\Delta t)\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \Delta t} \ln \frac{\|e((k+1)\Delta t)\|}{\|e(k\Delta t)\|} \frac{\|e(k\Delta t)\|}{\|e((k-1)\Delta t)\|} \dots \frac{\|e(2\Delta t)\|}{\|e(\Delta t)\|} \quad (8)$$

### 2.2 Duffing 系统的 Lyapunov 指数

对于由式(1)构成的正弦信号检测系统,用  $x + \delta_x$  和  $x$  表示初始位置不同的两点,  $\delta_x$  为两点的偏差,将  $x + \delta_x$  和  $x$  分别代入式(1),并相减可以得到如下的偏差方程

$$\dot{\delta}_x + k\delta_x - c(t)\delta_x = 0 \quad (9)$$

式中  $c(t) = 3x^2 - 5x^4$ 。

将式(9)改写成状态方程的形式,令  $\delta_x = \delta_y$ ,则有

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = \delta_y \\ \dot{\delta}_y = -k\delta_y + c(t)\delta_x \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)写成矢量微分方程形式

$$\dot{X}(t) = H(t)X(t) \quad (11)$$

式(11)中,  $X(t) = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_x \end{bmatrix}$ ,  $H(t) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & -k \end{bmatrix}。$$

因为  $X(t)$  为周期函数,所以  $H(t)$  是连续的周期性的  $2 \times 2$  阶实矩阵,其最小周期  $T = 2\pi$ ,有下式成立

$$H(t+T) = H(t), (-\infty < t < +\infty) \quad (12)$$

因为  $H(t)$  为周期矩阵,所以式(11)为一周期系数线性微分方程。为求出 Duffing 系统的 Lyapunov 指数,需要将式(11)转化为自治系统。

由周期系数线性微分方程理论,设  $D(t)$  为式(11)的基本解矩阵,则  $D(t+T)$  也是基本解矩阵。因为存在常数矩阵  $C$ ,使得  $D(t+T) = D(t)C$

当  $t = 0$  时,  $D(0) = I$ ,从而有

$$D(t+T) = D(t)D(T)$$

又因为  $D(T)$  是非退化的,所以存在一个用  $\ln D(T)$  表示的矩阵,使得  $e^{\ln D(T)} = D(T)$ 。

所以,式(11)的标准基本解矩阵可表示为

$$D(t) = F(t)e^{T^{-1}t \ln D(T)} \quad (13)$$

其中  $F(t)$  是一个非退化的周期矩阵。

$$F(t) = D(t)e^{-T^{-1}t \ln D(T)} \quad (14)$$

对式(11)做线性变换

$$X = F(t)Z \quad (15)$$

则周期系统式(11)、式(12)变成自治系统

$$\dot{Z} = T^{-1} \ln D(T) Z \quad (16)$$

设矩阵  $D(T)$  的两个特征根为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ ,则两个 Lyapunov 指数可表示为

$$l_1 = \frac{1}{T} \ln |\lambda_1|, l_2 = \frac{1}{T} \ln |\lambda_2| \quad (17)$$

由以上分析可知,可以通过求解  $D(T)$  的特征根即可得到式(11)的 Lyapunov 指数<sup>[9]</sup>。

### 3 仿真分析

#### 3.1 临界状态仿真

本文将 Duffing 混沌检测系统构造成三维系统,系统 Lyapunov 指数计算时间步长设置为 0.01,每次演化的步骤为 10,绘制 Lyapunov 指数谱时,摒弃了前 200 次不稳定的迭代。指数谱中均存在一定的过渡区域<sup>[10]</sup>,此区域中的 Lyapunov 指数取值的正负变化呈现不稳定的状态,为了能够应用 Lyapunov 指数准确地判断系统的状态,最好选取指数谱中稳定的 Lyapunov 指数值,本文中选取  $n = 900$  点处的 Lyapunov 指数值。图 2 显示了检测系统由混沌状态向大尺度周期状态跃变时 Lyapunov 指数谱变化情况。当系统的内置驱动信号幅值  $f_r = 0.7188$  时,  $\lambda_1 > 0$ ,系统处于混沌状态。当  $f_r = 0.7189$  时,  $\lambda_1 < 0, \lambda_3 < 0$ ,系统处于大尺度周期状态。由此可知,  $f_r = 0.7188$  是系统由混沌状态向大尺度周期状态转变的分叉阈值。

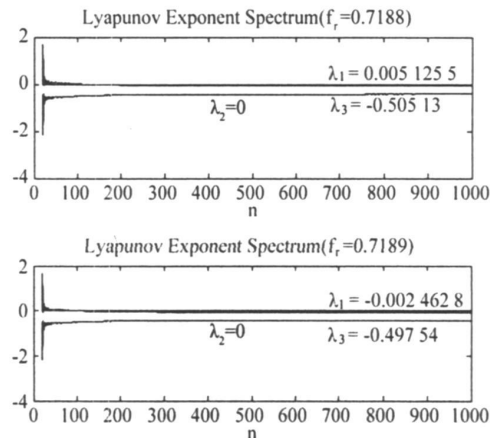


图2 临界状态下 Lyapunov 指数谱

Fig.2 Lyapunov exponent spectrum in the critical state

#### 3.2 瞬态仿真

由式(1)构成的 Duffing 混沌检测系统,设初值  $x(0) = 1, x'(0) = 1$ ,积分时间间隔为  $h = 0.01$ ,用四阶 Runge-Kutta 积分方程,去除前 200 次不稳定

的迭代。 $f_r$  的取值的初始值为 0.68, 终止值为 0.76, 步长为 0.001, 混沌检测系统各个瞬态的 Lyapunov 指数如图 3 所示。从图 3 可以看出, Duffing 混沌检测系统的 Lyapunov 指数随  $f_r$  变化呈对称分布, 对称轴为  $a = (\lambda_1 + \lambda_3)/2 = -0.25$ , 而对称位置源于式(1)中的  $K = 0.5$ , 其物理机制可能源于该混沌检测系统的固有性质<sup>[9]</sup>; Lyapunov 指数数值符号的变化可以方便地判断出系统所处的状态, 同样可以精确的计算出临界状态的系统内置驱动信号的幅值。所以, 利用 Lyapunov 指数可以很准确的判断混沌检测系统的状态, 从而提高了利用 Duffing 混沌检测系统检测微弱周期信号的准确性与可靠性。

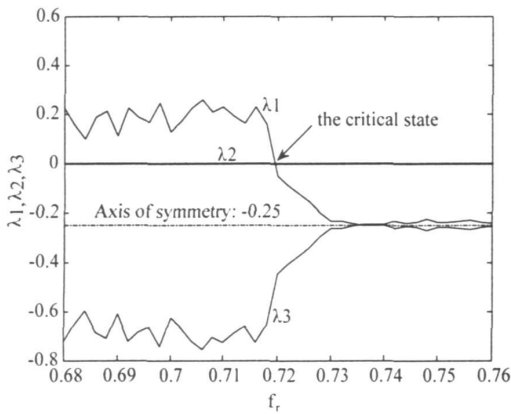


图3 Lyapunov指数随  $f_r$  分布图

Fig. 3 Distribution of Lyapunov exponent with  $f_r$

## 4 结论

利用 Lyapunov 指数定量分析混沌检测系统的动力学特性, 可准确地判定检测系统的瞬间状态和系统相变的阈值, 而且通过不断的提高  $f_r$  的精度能够更加准确地判定系统状态。利用 Lyapunov

指数判定 Duffing 混沌检测系统状态, 在很大程度上克服了直观判定相变方法所具有的主观性, 提高了利用 Duffing 混沌检测系统检测微弱信号的可靠性。但 Lyapunov 指数谱具有一定的过渡区域, 在此区域内 Lyapunov 指数取值的正负变化不稳定, 一般选取稳定区间的 Lyapunov 指数值来作为判定系统状态的指标。

## 参考文献:

- [1] 周玲, 田建生, 刘铁军. Duffing 混沌振子用于微弱信号检测的研究[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(10): 1477-1479.
- [2] 李月, 杨宝俊, 石要武. 色噪声背景下微弱正弦信号的混沌检测[J]. 物理学报, 2003, 52(3): 1956-1959.
- [3] 崔芹. 基于混沌理论微弱信号检测[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2008.
- [4] 李月, 杨宝俊, 林红波, 等. 基于特定混沌系统微弱谐波信号频率检测的理论分析与仿真[J]. 物理学报, 2005, 54(5): 1995-1998.
- [5] 谢涛, 魏学业. 混沌振子在微弱信号检测中的可靠性研究[J]. 仪器仪表学报, 2005, 29(6): 1265.
- [6] 庄艳丽. 基于混沌振子的微弱信号检测方法研究[D]. 成都: 成都电子科技大学, 2006.
- [7] 吕金虎, 陆安君. 混沌时间序列分析及应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.
- [8] BARANA G, TSUDA I. A new method for computing Lyapunov exponents [J]. Phys., Lett., A, 1993, 175(6): 421-427.
- [9] 李月, 杨宝俊. 混沌振子检测引论[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.
- [10] 杨红英, 叶昊, 王桂增, 等. Duffing 振子的 Lyapunov 指数与 Floquet 指数研究[J]. 仪器仪表学报, 2008, 29(5): 927-931.

(责任编辑 刘存英)