文章编号: 1673- 9469(2011) 01- 0019- 03

求变截面梁位移方法的研究

贾建国[1], 李长辉[2], 武振亚[1]
(1. 中铁六局集团 天津铁路建设有限公司, 天津 300232; 2. 天津大学, 天津 300072)

摘要: 实际工程中比较常见的变截面梁, 其抗弯刚度是一个变量, 在进行其刚度计算时, 用各种方法求出其挠曲线方程, 然后根据方程再求出梁的最大位移, 从而对该变截面梁进行刚度校核并使其安全可靠。本文针对变截面梁, 提出了求位移的单位力方法、积分法、最小势能原理法, 通过实例验证了所提方法的正确性, 这无论对于实际工程应用还是理论研究都具有重要的参考价值。

关键词: 变截面梁; 抗弯刚度; 最小势能原理; 挠曲线方程
中图分类号: TU312 文献标识码: A

Study on methods for solving displacement of non- uniform beams

JIA Jian-guo[1], LI Chang-hui[2], WU Zhen-ya[1]
(1. CRC of Sixth Branch of Chinese Railways, Tianjin 300140, China; 2. Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: In solving displacement of non- uniform beams, all of the textbooks and documents about mechanics of materials expatiate upon uniform beams, whose flexural rigidity EI is constants, while seldom about non- uniform beams. But non- uniform beams whose flexural rigidity EI is variable quantity, are very popular in the practical engineering. When we calculate for rigidity of the non- uniform beams, we achieve firstly equations of deflection curve by making use of various methods. Then obtain the maximum displacement through solving equations. Finally we check the rigidity of non- uniform beams and make it to be safety and reliability. Methods of unit force, integration and the least potential principle is put forward for solving displacement of non- uniform beams. These methods are proved to be correct by instances and be valuable for the engineering practice and theoretical research.

Key words: non- uniform beam; flexural rigidity; principle of minimum potential energy; equation of deflection curve

在求解梁的位移时, 对于抗弯刚度 EI 为常量的等直梁, 求解的方法很多, 而对于变截面梁国内外的文献研究很少。本文提出了求变截面梁位移的单位力法、积分法、最小势能原理法, 这对于实际工程应用以及理论研究都具有很好的参考价值。

1 求变截面梁位移的方法

1.1 单位力法求位移

$$1 \times \triangle = \int_0^l \frac{M_{0(x)} M_{(x)}}{EI_{(x)}} dx \tag{1}$$

式中 1—广义力; △—与广义力相对应的广义位移; $M_{0(x)}$, $M_{(x)}$—单位力及荷载作用下引起的任意 x 截面的弯矩。

收稿日期: 2010- 11- 05
作者简介: 贾建国(1959-), 男, 河北石家庄人, 高级工程师, 从事桥梁工程方面的研究。

1.2 积分法求位移

在用积分法求梁的挠曲线方程时，所有的材料力学教材中阐述的均为抗弯刚度 EI 为常量的等直梁。但是，在实际工程中往往遇到变截面梁，即 $EI(x)$ 为变量的梁。下面给出求解变截面梁挠曲线方程的一般方法。对于变截面梁，挠曲线近似微分方程为 $EI_{(x)}\ddot{y}=M_{(x)}$ 因此

$$\ddot{y}=\frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \tag{2}$$

对式(2) 连续积分二次，可得到变截面梁挠曲线方程的一般表达式 $y_{(x)}$

$$y_{(x)}=\int\left(\int\frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}}dx\right)dx+c_1x+c_2 \tag{3}$$

其中 c_1, c_2 为积分常数，可根据边界条件来确定。

依据上式，就可以求出变截面梁任一截面的挠度和转角，从而可进行梁的刚度校核。由上述变截面梁的挠曲线方程的求解过程可见与等直梁类似，只不过任一截面对中性轴的惯性矩 $I_{(x)}$ 是个变量，积分时比等直梁复杂。

1.3 最小势能原理求位移

变截面梁的总势能为

$$\Pi=U-W \tag{4}$$

式中 U—变截面梁的应变能；W—变截面梁上的荷载所做的功；Π—C_m 的函数，$(m=1, 2, 3, \cdots, n)$。

根据最小势能原理有

$$\frac{\partial\Pi}{\partial C_m}=0 \tag{5}$$

此时 $\frac{\partial^2\Pi}{\partial C_m^2}>0$，总势能取最小值。

变截面梁在荷载作用下挠曲线方程可预先定为 $y_{(x)}$

$$y_{(x)}=\sum_{i=1}^{n}C_iy_{i(x)} \tag{6}$$

$y_{(x)}$ 必须满足变截面梁的位移边界条件，当同时满足力的边界条件时，求出的临界力就逼近精确解。将式(6) 代入式(5)，将给出 C_m 的 m 个线性代数方程，这样，就可以求出 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n$，从而得到 $y_{(x)}$ 的表达式。n 值越大，$y_{(x)}$ 的值就越接近于精确解。

变截面梁的应变能 U 的计算公式为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}}ds=\frac{1}{2}\int_0^l EI_{(x)}\left(\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2}\right)^2ds \tag{7}$$

U 的计算与等截面梁不同的 $I_{(x)}$ 是个变量，求解较复杂。

2 算例

如图1所示的变截面悬臂梁，在自由端受到外力偶矩 m 作用，试分别用单位力法、积分法求该梁自由端的挠度。

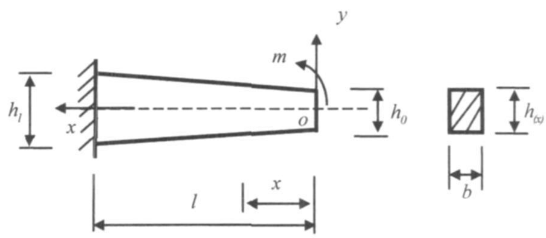

图1 受集中力力偶作用的变截面悬臂梁

Fig.1 The variable cross-section projecting beam under the moment of couple

2.1 单位力法求图1梁的挠度

为求出变截面梁自由端的挠度，在梁的自由端单独加一个方向向下的单位力1，所以 $M_{0(x)}=-x$，$M_{(x)}=m$，$I_{(x)}=\frac{bh_{(x)}^3}{12}=\frac{b}{12}[h_0+\frac{x}{l}(h_1-h_0)]^3$

代入式(1) 进行计算，得

$$\triangle\int_0^l\frac{M_{0(x)}M_{(x)}}{EI_{(x)}}ds=-\int_0^l\frac{12ms}{bE[h_0+\frac{x}{l}(h_1-h_0)]^3}dx=$$

$$-\frac{12m}{bE}\times\frac{1}{(\frac{h_1-h_0}{l})^2}\left[-\frac{1}{h_0+\frac{h_1-h_0}{l}x}+\frac{h_0}{2(h_0+\frac{h_1-h_0}{l}x)^2}\right]_0^l=$$

$$-\frac{12ml^2}{bE(h_1-h_0)^2}\left(\frac{1}{2h_0}-\frac{1}{h_1}+\frac{h_0}{2h_1^2}\right)$$

这就是其精确解。

当 $h_1=2h_0$ 时，变截面梁自由端的挠度为 $\triangle=-\frac{12ml^2}{8Ebh_0^3}=-\frac{ml^2}{8EI_{(0)}}$(方向向上)；这是 $h_1=2h_0$ 时的精确解，其中 $I_{(0)}=\frac{bh_0^3}{12}$。

2.2 积分法求图1梁的挠度

$M_{(x)}=m$，$I_{(x)}=\frac{bh_{(x)}^3}{12}=\frac{b}{12}[h_0+\frac{x}{l}(h_1-$

$h_2)]^3$, 代入式(3) 进行积分运算可得

$$y_{(x)} = \frac{12ml^2}{2Eb(h_1-h_0)^2}\frac{1}{h_0+\frac{x}{l}(h_1-h_0)} + c_1x + c_2 \tag{8}$$

利用边界条件 $y|_{x=l}=0, y'|_{x=l}=0$ 可定出 c_1, c_2, 式(8) 可写成

$$y_{(x)} = \frac{12ml^2}{2Eb(h_1-h_0)^2}\frac{1}{h_0+\frac{x}{l}(h_1-h_0)} + \frac{6mlx}{Eb(h_1-h_0)h_1^2} - \frac{6ml^2}{Eb(h_1-h_0)^2h_1} + \frac{6ml^2}{Eb(h_1-h_0)h_1^2} \tag{9}$$

当 $h_1 = 2h_0, x = 0$ 时, 变截面梁自由端的挠度为

$\triangle = \frac{12ml^2}{8Ebh_0^3} = \frac{ml^2}{8EI_{(0)}}$(方向向上), 与用单位力法求出的结果完全相同, 这是 $h_1 = 2h_0$ 时的精确解。

2.3 最小势能原理求图 2梁的挠度

$$I_{(x)} = \frac{bh_{(x)}^3}{12} = \frac{b}{12}[h_0 + \frac{(l-x)(h_1-h_0)}{l}]^3$$

设 $y_{(x)} = C_2x^2$, 在边界上满足变截面梁的位移边界条件, 由所假设的位移函数, 按下式可求出该变截面梁的总势能为

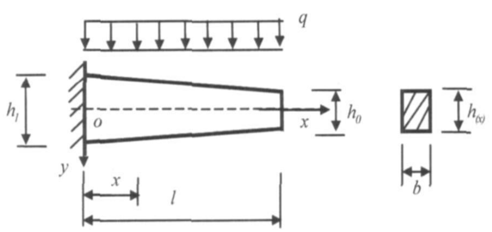

图2 受均布荷载作用的变截面悬臂梁

Fig. 2 The variable cross-section projecting beam under the uniform load

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}}dx = \frac{1}{2}\int_0^l EI_{(x)}(\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2})^2dx - \int_0^l qC_2x^2dx = \frac{E}{2}\int_0^l 4C_2^2\frac{b}{12}[h_0 + \frac{(h_1-h_0)(l-x)}{l}]^3dx - \frac{ql^3}{3}C_2 = \frac{EblC_2^2}{24(h_1-h_0)}(h_1^4-h_0^4) - \frac{q}{3}C_2l^3$$

$\frac{\partial\Pi}{\partial C_2} = 0$, 可得 $C_2 = \frac{ql^2(h_1-h_0)}{Eb(h_1^4-h_0^4)}$

$$y_{(x)} = \frac{4ql^2(h_1-h_0)}{Eb(h_1^4-h_0^4)}x^2 \tag{10}$$

自由端的挠度为 $y_{(l)} = \frac{4ql^2(h_1-h_0)}{Eb(h_1^4-h_0^4)}$。当 $h_1 = 2h_0$, 变截面梁自由端的挠度为

$y_{(l)} = \frac{12ql^4}{45Ebh_0^3} = \frac{ql^4}{45EI_0}$, 这是其近似解。当 $h_1 = 2h_0$ 精确解为 $y_{(l)} = \int_0^l \frac{x_1\frac{qx_1^2}{2}}{E\frac{b}{12}[h_0 + \frac{(l-x_1)}{l}]^3}dx_1 = \frac{0.0793ql^4}{EI_0}$。近似解与精确解之间的相对误差为 72%, 误差很大。

为了提高计算精度, 设 $y_{(x)} = C_2x^2 + C_3x^3$, 在边界上满足变截面梁的位移边界条件, 将 $y_{(x)}$ 对 x 求二阶导数代入 Π的计算公式进行运算, 得该变截面梁的总势能为

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}}dx = \frac{1}{2}\int_0^l EI_{(x)}(\frac{d^2y_{(x)}}{dx^2})^2dx - \int_0^l q(C_2x^2 + C_3x^3)dx = a_1C_2^2 + a_2C_2C_3 + a_3C_3^2 - q(C_2\frac{l^3}{3} + C_3\frac{l^4}{4})$$

由最小势能原理可得

$$\frac{\partial\Pi}{\partial C_2} = 0, 2a_1C_2 + a_2C_3 - \frac{ql^3}{3} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial C_3} = 0, a_2C_2 + 2a_3C_3 - \frac{ql^4}{4} = 0 \tag{12}$$

由(11)、(12) 两式解得

$$C_2 = \frac{(8a_1a_3 - 2a_1a_2l)ql^3}{12a_1(4a_1a_3 - a_2^2)}$$

$$C_3 = \frac{(3a_1l - 2a_2)ql^3}{6(4a_1a_3 - a_2^2)}$$

所以, 该变截面梁的挠曲线方程为

$$y_{(x)} = \frac{(8a_1a_3 - 2a_1a_2l)ql^3}{12a_1(4a_1a_3 - a_2^2)}x^2 + \frac{ql^3(3a_1l - 2a_2)}{6(4a_1a_3 - a_2^2)}x^3 \tag{13}$$

式中 $a_1 = \frac{Ebl(h_1+h_0)(h_1^2+h_0^2)}{24}$

$$a_2 = Eb[\frac{-l^2h_0^4}{4(h_1-h_0)} + \frac{l^2(h_1^5-h_0^5)}{20(h_1-h_0)^2}]$$

(下转第 29 页)

5 结语

1) 根据开挖过程存在的时空效应, 缩短基坑开挖后的暴露时间, 尽快见底施工结构底板。

2) 基坑整体开挖起始位置应选择两墙段的交接处、基坑的边角或竖向支护结构的拐点, 以减小地下连续墙变形量。

3) 开挖后及时对墙体进行加固; 在条件允许的情况下, 多划分施工单元。采取盆式开挖的方式能有效减小地下连续墙变形。

4) 在不影响出土的前提下, 减小地下连续墙的横向长度, 从而增加支撑刚度。

参考文献:

[1] 刘建航, 侯学渊. 基坑工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.
[2] 李云安. 基坑变形影响因素与有限元数值模拟[J]. 岩土工程技术, 2001(2): 63- 68.
[3] 凌 宏, 罗小文. 复杂软土深基坑围护结构水平位移的时空效应分析[J]. 建筑科学, 2007, 23(5): 45- 48.
[4] 陈仲颐, 叶书麟. 基础工程[M]. 北京: 中国建筑出版社, 1990,
[5] 孙志华, 邓义龙, 田红梅, 等. 超长深基坑土方开挖方法[J]. 城市勘测, 2008(6): 152- 156.

(责任编辑　刘存英)

(上接第 21 页)

$$a_3 = \frac{3Eb}{2}\left[\frac{l^3(h_1^6 - h_0^6)}{60(h_1 - h_0)^3} - \frac{l^3 h_0^5}{10(h_1 - h_0)^2} - \frac{l^3 h_0^4}{4(h_1 - h_0)}\right]$$

利用式(13) 求解就比利用式(10) 求解更接近精确解。

当 $h_1 = 2h_0, x = l$ 时, 由式(13) 求得变截面梁自由端的挠度为

$$y_{(l)} = \frac{0.022\ 653ql^4}{EI_{(0)}} \tag{14}$$

与精确解 $y_{(l)} = \dfrac{0.022\ 22ql^4}{EI_{(0)}}$ 相比其相对误差为 1.9%, 可见具有相当高的精度。

式中 $I_{(0)} = \dfrac{bh_0^3}{12}$ 为梁自由端横截面对中性轴的惯性矩。

当取的项越多就越接近精确解, 相应的工作量就越大, 但精度就越高。对于上例, 如果假设位移函数为 $y_{(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\left[1 - \cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l}\right]$, 只要取其中的前几项求解, 很快就会得到其精确解。

3 结论

本文所给出的单位力法、积分法、最小势能原理法, 都是求解变截面梁很好的方法, 其中单位力法、积分法为精确的方法, 最小势能原理法为近似方法。单位力法可以很快求出变截面梁的某个截面的挠度和转角的精确解; 积分法可以求出变截面梁精确的挠曲线方程, 根据挠曲线方程可求出任一截面的挠度和转角的精确解, 对理论研究很有意义。

参考文献:

[1] 王世斌. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
[2] 孙训方. 材料力学(Ⅱ)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
[3] 徐杏华. 基于最小势能原理的悬臂梁弯曲研究[J]. 陕西理工学院学报, 2009, 25(1): 12- 16.
[4] 李自林. 变截面构件受冲击荷载作用时动应力的计算[J]. 河北建筑科技学院学报, 1999, 16(4): 6- 9.

(责任编辑　刘存英)