

文章编号: 1673- 9469(2011) 02- 0024- 03

功能梯度 Timoshenko 梁的静力弯曲分析

付俊强¹, 龚云²

(1. 洛阳理工学院 机械工程系, 河南 洛阳 471023, 2. 焦作师范高等专科学校 基建处, 河南 焦作 454002)

摘要: 基于 Timoshenko 梁变形理论, 建立功能梯度材料梁在均布载荷作用下的弯曲控制方程, 寻找均匀梁和非均匀梁的控制方程的相似性, 将功能梯度材料梁的弯曲求解转化为均匀梁的弯曲求解与相似转换系数的计算。通过理论推导和相似性分析证明, 功能梯度 Timoshenko 梁的弯曲解与同样尺寸、边界条件和载荷条件下的均匀材料 Timoshenko 梁的弯曲解成正比, 这个比例常数完全由材料的非均性质参数确定。

关键词: 功能梯度材料; Timoshenko 梁; 弯曲分析

中图分类号: TU 471

文献标识码: A

Static bending analysis of functionally graded Timoshenko beam

FU Jun-qing¹, GONG Yun²

(1. Department of Mechanical Engineering, Luoyang Institute of Science and Technology, Henan Luoyang, 471023, China; 2. Department of Infrastructure, Jiaozuo Teachers College, Henan Jiaozuo, 454002, China;)

Abstract Based on Timoshenko beam deformation theory, the governing equations for the problem were built up. The authors studied the similarities of governing equations between the homogeneous beam and the non-uniform beam, and then the problem of functional gradient materials beam bending was to solve bending of uniform beam and to calculate similarity coefficient of product. Through theoretical derivation and analysis of the similarity, we found that the bending solutions of functional gradient Timoshenko beam is proportional to uniform materials Timoshenko beam with the same size, boundary conditions and load conditions, This proportional factor was determined entirely by nature inhomogeneous parameter of material constants.

Key words: functionally graded material (FGM); Timoshenko beam; bending analysis

均质材料 Timoshenko 梁的研究已有许多文献报道, Timoshenko^[1] 首先研究了各向均匀梁的剪切变形效应; 龚善初^[2] 应用最小余能原理的理论和方法, 对 Timoshenko 梁进行了动力分析; 刘吉源^[3] 分析了在轴向力作用下的 Timoshenko 梁的横向振动频率特性; 马连生^[4] 利用 Euler - Bernoulli 梁理论、Timoshenko 梁理论和 Reddy 三阶梁理论的特征值问题的相似性, 研究了不同梁理论之间特征值的关系。近年来, 人们从不同角度开展了 FGM 结构力学方面的研究, Ma 和 Wang^[5-6] 基于经典理论, 用打靶法求解了周边简支和周边固支功能梯度材料圆薄板在横向荷载作用下的大挠度弯曲问

题, 以及在径向均布机械荷载作用下的后屈曲行为; Shen^[7] 采用二次摄动技术求解了四边简支功能梯度复合材料矩形板在热/机荷载作用下的非线性弯曲问题; WOO^[8] 基于经典理论, 推导了横向载荷和温度场作用下 FGM 矩形板和浅壳大挠度 Fourier 级数形式的解析解。

本文基于 Timoshenko 梁理论, 推导了功能梯度材料梁的弯曲控制方程, 通过理论推导和相似性分析证明, 将功能梯度 Timoshenko 梁问题的求解转化为均匀材料梁的求解, 从而为功能梯度梁的弯曲分析提供便捷的途径。

收稿日期: 2011- 03- 14

基金项目: 洛阳理工学院青年基金(2009QZ08)

作者简介: 付俊强(1981-), 男, 河南洛阳人, 助教, 工学硕士, 从事功能梯度材料结构力学和机械设计制造方面的研究。

1 求解方法

考虑一厚度为 h 、长度为 l 、横截面积为 A 的矩形截面 FGM 梁, 材料的弹性模量只沿厚度方向呈梯度变化, 梁上作用有横向均布载荷 q , 建立坐标系如图 1。

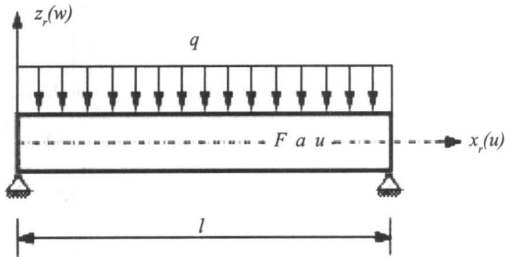


图1 功能梯度材料梁的示意图

Fig.1 The schematic diagram of FGM

Timoshenko 梁理论克服了 Euler 梁理论的局限性, 粗略地考虑了横截面内的剪切变形。它的基本假定是: 横截面在变形中始终保持平面, 但在弯曲变形之后, 横截面不再与中轴线垂直, 而是形成了一定的转角, 该转角是由弯曲应力引起的转角和由剪应力引起的转角共同组成。它不仅考虑了弯曲变形, 也考虑了由剪应力引起的剪切变形, 且假定剪应力沿横截面等值分布, 这种变形理论也称为一阶剪切变形理论。需强调的是, 该理论必须进行剪切修正, 这个修正系数不仅与材料和几何参数有关, 还与载荷及边界条件有关。

Timoshenko 梁变形理论下梁的几何方程为

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x) - z\varphi, w = w_0(x), \varphi = \varphi(x) \\ \varepsilon(x, z) = \frac{du_0}{dx} - z \frac{d\varphi}{dx} \\ \gamma(x, z) = \frac{dw_0}{dx} - \varphi \end{cases} \quad (1)$$

式中 u_0 、 w_0 —轴线上一点的位移; φ —横截面转角; ε 和 γ —横截面上的线应变和剪应变。

横截面上的正应力和剪应力为

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon = E \left[\frac{du_0}{dx} - z \frac{d\varphi}{dx} \right] \\ \tau = \frac{G\gamma}{k} = \frac{G}{k} \left[\frac{dw_0}{dx} - \varphi \right] \end{cases} \quad (2)$$

式中 G —剪切弹性模量; k —校正因子; $E = E(z)$ —弹性模量, 沿厚度呈梯度变化。

假设弹性模量按下列幂函数变化

$$E(z) = E_b + (E_t - E_b) \left[\frac{1}{2} - \eta \right]^n, \quad \eta = \frac{z}{h}, \quad -$$

$$h/2 \leq z \leq h/2 \quad (3)$$

式中 $E_b = E(h/2)$, $E_t = E(-h/2)$, 它们分别为上、下表面的弹性模量。

对于功能梯度材料, 弹性常数满足

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (4)$$

由式(2)可得横截面的等效内力

$$\begin{cases} N = \int_A \sigma dA = A_1 \frac{du_0}{dx} - B_1 \frac{d\varphi}{dx} \\ M = \int_A z\sigma dA = B_1 \frac{du_0}{dx} - D_1 \frac{d\varphi}{dx} \\ F_s = \int_A \tau dA = C_1 \left[\frac{dw_0}{dx} - \varphi \right] \end{cases} \quad (5)$$

刚度系数 (A_1, B_1, D_1, C_1) 的定义为 $A_1 = \int_A E dA$,

$$B_1 = \int_A zE dA, D_1 = \int_A z^2 E dA, C_1 =$$

$$\frac{1}{2k(1+\mu)} \int_A E dA = \frac{A_1}{2k(1+\mu)} \quad (6)$$

将式(3)代入式(6), 并令 $\alpha = K - 1, K = E_t/E_b$, 积分可得

$$A_1 = E_b h b \phi_1, B_1 = E_b h^2 b \phi_2, D_1 = E_b h^3 b \phi_3 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \phi_1 &= 1 + \frac{\alpha}{n+1}, \phi_2 = -\frac{n\alpha}{2(n+1)(n+2)}, \phi_3 \\ &= \frac{1}{12} + \frac{\alpha(n^2+n+2)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

显然, 对于均匀材料有 $E_b = E_t = E, \alpha = 0$, 这时就有 $A_1 = EA, B_1 = 0, D_1 = EI$ 。其中 $I = bh^3/12$ 为横截面的惯性矩。力形式的平衡方程为

$$\frac{dN}{dx} = 0, \frac{dF_s}{dx} = q, \frac{dM}{dx} = F \quad (8)$$

将式(5)代入式(8), 得到位移形式的平衡方程

$$\begin{cases} A_1 \frac{d^2 u_0}{dx^2} - B_1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0 \\ C_1 \left[\frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \right] = q \\ B_1 \frac{d^2 u_0}{dx^2} - D_1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = C_1 \left[\frac{dw_0}{dx} - \varphi \right] \end{cases} \quad (9)$$

将式(9)消去轴向位移可得

$$\left[\frac{B_1^2}{A_1} - D_1 \right] \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = C_1 \left[\frac{dw_0}{dx} - \varphi \right] \quad (10)$$

对式(10)求一次导数, 并结合式(9)可得关于转角的独立方程

$$\left[\frac{B_1^2}{A_1} - D_1 \right] \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = q \quad (11)$$

$$\text{引入无量纲量 } \zeta = x/l, Q = \frac{12ql^3}{E_b b h^3} \quad (12)$$

对式(11)无量纲变换,得到无量纲化的微分方程

$$\frac{d^3 \varphi}{d\zeta^3} = -cQ \quad (13)$$

$$\text{其中 } c = \frac{1}{12(\phi_3 - \phi_2/\phi_1)}$$

由式(10)可以求得

$$\frac{dW}{d\zeta} = \varphi + 2k(1+\mu) \delta^2 \left[\frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} - \frac{\phi_3}{\phi_1} \right] \frac{d^2 \varphi}{d\zeta^2} \quad (14)$$

上式积分则可得挠度。式中第二项是对 Euler 梁理论的修正,如果梁为细长的,则 $\delta^2 = (h/l)^2$ 很小,该项即可被忽略,则变形为满足直法线假设的 Euler 梁理论。

如果材料为均匀的,则 $\phi_1 = 1, \phi_2 = 0, \phi_3 = 1/12, c = 1$ 。这时方程(13)和(14)变为

$$\frac{d^3 \varphi^*}{d\zeta^3} = -Q \quad (15)$$

$$\frac{dW^*}{d\zeta} = \varphi^* - \frac{k(1+\mu)\delta^2}{6} \frac{d^2 \varphi^*}{d\zeta^2} \quad (16)$$

如果我们已求得均匀 Timoshenko 梁的转角 φ^* , 则非均匀 Timoshenko 梁的转角为

$$\varphi = c\varphi^* \quad (17)$$

由式(16)知均匀梁与非均匀梁的无量纲挠度之间的关系为

$$\frac{dW}{d\zeta} = c \left[\varphi^* + 2k(1+\mu) \delta^2 \left[\frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} - \frac{\phi_3}{\phi_1} \right] \frac{d^2 \varphi^*}{d\zeta^2} \right] \quad (18)$$

积分后可得非均匀 Timoshenko 梁的无量纲挠度函数。

2 结论

1) 将功能梯度材料 Timoshenko 梁在静载荷作用下的弯曲变形解用相同尺寸、相同载荷作用下均匀材料 Timoshenko 梁的弯曲变形解乘以非均匀

系数来表示。

2) 将求解非均匀 Timoshenko 梁的问题转化为解均匀材料 Timoshenko 梁和非均系数的问题,从而使得问题大大简化。

3) 由于方程都是线性的,这种相似转化可以推广到无量纲弯矩、转角和剪力的计算,而且对于任意的载荷工况和边界条件都适应。

参考文献:

- [1] TIMOSHENKO S P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars[J]. Phil Mag, 1941, 744-746.
- [2] 龚善初. 几何参数对 Timoshenko 梁固有频率的影响[J]. 武汉理工大学学报, 2005, 29(3): 473-475.
- [3] 刘吉源, 戈新生, 陈立群. 轴向力作用下 Timoshenko 梁的横向振动[J]. 北京机械工业学院学报, 2000, 15(3): 56-59.
- [4] 马连生, 欧志英, 黄达文. 不同梁理论之间简支梁特征值的解析关系[J]. 工程力学, 2006, 23(10): 91-95.
- [5] MA L S, WANG T J. Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003(40): 3311-3330.
- [6] MA L S, WANG T J. Axisymmetric post-buckling of a functionally graded circular plate subjected to uniformly distributed radial compression[J]. Materials Science Forum, 2003, 423-425.
- [7] SHEN H S. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2002, 44(3): 561-584.
- [8] WOO J, MEGUID S A. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001(38): 7409-7421.

(责任编辑 刘存英)