

文章编号: 1673- 9469(2011) 02- 0027- 03

# 粘弹性圆柱体运动微分方程的建立

张波

(陕西理工学院 土建系, 陕西汉中 723001)

**摘要:**通过对轴向流动中粘弹性圆柱体微单元的受力分析,运用 D'Alembert 原理建立了其运动微分方程。然后引入 Kelvin 模型的微分算子,得到了轴向流动中 Kelvin 模型粘弹性圆柱体的运动微分方程,最后再分别引入无量纲量将 Kelvin 模型的微分方程化为无量纲方程。

**关键词:**粘弹性圆柱体; 轴向流动; Kelvin 模型; 运动微分方程

中图分类号: TU311.3

文献标识码: A

## Establishment on momentum differentiating equation of viscoelastic cylinder

ZHANG Bo

(Department of Civil Engineering & Architecture, Shanxi University of Technology, Shanxi Hanzhong 723001, China)

**Abstract:** By the analysis of force- balance of cylinder element, the differential equation of viscoelastic cylinder is derived based on the D'Alembert's principle. And the operators of Kelvin model solid model are introduced into the differential equation respectively, and then the differential equations of viscoelastic cylinder with Kelvin model solid model are established. The differential equations of Kelvin viscoelastic cylinder are converted into dimensionless equations with introduction of dimensionless quantities.

**Key words:** viscoelastic cylinder; axial flow; Kelvin model; momentum differentiating equation

我们实际生活中遇到的很多材料常同时具有弹性和粘性两种不同机理的形变,如塑料、橡胶、混凝土和岩石等材料,然而从粘弹性材料这个角度出发来研究问题的人较少<sup>[1-2]</sup>。本文在前人研究成果的基础之上,将轴向流动中的圆柱体视为粘弹性材料,并取微单元进行受力分析,运用 D'Alembert 原理建立其运动微分方程,并引入 Kelvin 模型的微分算子,得到了轴向流动中 Kelvin 模型粘弹性圆柱体的运动微分方程。

### 1 粘弹性圆柱体的运动方程

轴向流动中两端简支的粘弹性圆柱体如图 1 所示。设  $y$  为圆柱体挠度,  $m$  为圆柱体单位长度质量,  $m_a$  为圆柱体单位长度附加质量 ( $m_a = \rho V C_m$ , 其中,  $\rho$  为流体密度,  $V$  是圆柱体的体积,  $C_m$  为附加质量系数),  $u$  为沿圆柱体轴向的流动速

度,  $EI$  为抗弯刚度,  $l$  为圆柱体长度,  $D$  为圆柱体直径。

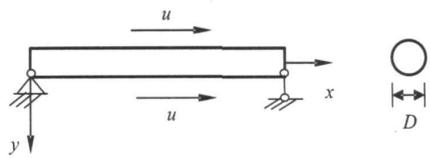


图1 轴向流动中的简支粘弹性圆柱体

Fig.1 The simply support viscoelastic cylinder in axial flow

假定圆柱体的运动全部限制在  $x-y$  平面内,从粘弹性圆柱体上截取长度为  $\delta x$  的微单元作为研究对象,受力如图 2 所示。图中  $T$  为拉力,  $V$  是剪力,  $M$  是弯矩,  $m(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}) \delta x$  是圆柱体的惯性力,  $F_D \delta x$  是粘性阻尼力,而  $F_N$  和  $F_L$  是横向与纵向单

位长度上的阻力,  $F_l$  作用在单位长度上的圆柱体侧向力, 它由绕圆柱体流动的动量变化给出<sup>[3]</sup>。

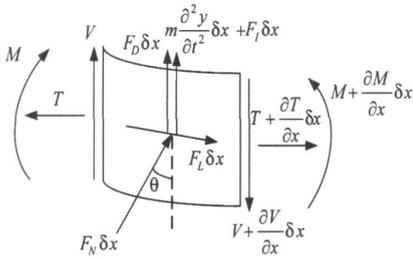


图2 微元体受力图

Fig. 2 Free body diagram of micro-unit

$$F_l = m_a \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 y \quad (1)$$

对于单位长度上的阻力  $F_N$  和  $F_L$  有

$$F_N = \frac{1}{2} \frac{m_a}{D} u C_N \left[ \frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \right] \quad (2)$$

$$F_L = \frac{1}{2} \frac{m_a}{D} u^2 C_T \quad (3)$$

拉力  $T$  可以表示为

$$T(x, t) = \gamma T_0 + \frac{1}{2} C_T \frac{m_a u^2}{D} \left[ \left[ 1 - \frac{1}{2} \gamma \right] l - x \right] + \frac{1}{2} (1 - \gamma) C' T m_a u^2 \quad (4)$$

粘性阻尼影响力  $F_D$  可以表示为

$$F_D = C_v \frac{\partial y}{\partial t} \quad (5)$$

式中  $C_T$ —圆柱体纵向阻力系数;  $C_N$ —圆柱体横向阻力系数;  $C_v$ —有效粘性阻力系数;  $\gamma$ —常数(圆柱体下游受支承时  $\gamma = 1$ , 下游端自由或弹性支承时  $\gamma = 0$ ),  $C'_T$ —自由端的形状阻力系数;  $T_0$ —初始轴向拉力。

根据达朗伯原理<sup>[4]</sup>, 对微元分别列出  $x$ 、 $y$  方向力的平衡方程, 并考虑到当  $\theta \rightarrow 0$  时, 有  $\sin \theta \approx 0$ ,  $\cos \theta \approx 1$ , 则有

$$\frac{\partial T}{\partial x} + F_N \frac{\partial y}{\partial x} + F_L = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - F_l - F_N - F_D + F_L \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

如果忽略转动惯量, 则  $x$ - $y$  平面上的转动平衡方程为

$$\frac{\partial M}{\partial x} - V + T \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

对于粘弹性材料, 应力和应变之间的关系为

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad (9)$$

式中  $P$ 、 $Q$ —微分算子。

弯矩  $M(x, t)$  和挠度  $y(x, t)$  有如下的微分关系

$$PM = -QI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (10)$$

根据式(6)、式(7)、式(8)、式(9)、式(10), 得到粘弹性圆柱体在横向流动中的运动微分方程

$$QI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - PI \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Pm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + PF_l + PF_N + PF_D - PF_L \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

把式(1)、式(2)、式(3)、式(4)、式(5)代入式

(11)可以得到粘弹性圆柱体的运动微分方程

$$QI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P \left\{ \gamma T_0 + \frac{1}{2} C_T \frac{m_a u^2}{D} \left[ \left[ 1 - \frac{1}{2} \gamma \right] l - x \right] + \frac{1}{2} (1 - \gamma) C' T m_a u^2 \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Pm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P \left[ m_a \left[ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 y \right] + P \left\{ \frac{1}{2} \frac{m_a}{D} u C_N \left[ \frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \right] \right\} + PC_v \frac{\partial y}{\partial t} + P \left[ \frac{1}{2} \frac{m_a}{D} u^2 C_T \right] \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

## 2 Kelvin 模型的运动微分方程

假定圆柱体的材料服从 Kelvin 模型<sup>[5]</sup>, 则有

$$\sigma = Ee + \eta \frac{\partial e}{\partial t} \quad (13)$$

式中  $\sigma$ —正应力;  $e$ —线应变;  $E$ —弹性模量;  $\eta$ —粘性系数。

$$P = 1, Q = E + \eta \frac{\partial}{\partial t} \quad (14)$$

将式(14)代入式(12), 并略去二阶小量, 即可得到 Kelvin 模型粘弹性圆柱体在轴向流动中的运动微分方程

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + m_a u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \gamma T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{2} C_T \frac{m_a u^2}{D} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \gamma \right) l - x \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{2} (1 - \gamma) C' T m_a u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2m_a u \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2} C_N \frac{m_a u^2}{D} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2} C_N \frac{m_a u}{D} \frac{\partial y}{\partial t} + C_v \frac{\partial y}{\partial t} + (m + m_a) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

引入下列无量纲量

$$\zeta = x/l, \varepsilon = l/D, w = y/l, \alpha = \left[ \frac{I}{E(m + m_a)} \right]^{1/2} \frac{\eta}{l^2}, v = \left( \frac{m_a}{EI} \right)^{1/2} ul, \Gamma_0 = T_0 l^2 / EI, \beta = \frac{m_a}{m + m_a}, \delta = \frac{C_v l^2}{[EI(m + m_a)]^{1/2}}, \tau = \left( \frac{EI}{m + m_a} \right)^{1/2} \frac{t}{l^2} \quad (16)$$

将方程(15)化为无量纲方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^4} + \alpha \frac{\partial^5 w}{\partial \tau \partial \zeta^4} - \gamma \Gamma_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + v^2 \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon C_T (1 - \frac{1}{2} \gamma - \zeta) - \frac{1}{2} (1 - \gamma) C'_T \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \varepsilon C_N \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right\} + 2 \beta^{1/2} v \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \tau} + \frac{1}{2} \varepsilon C_N \beta^{1/2} v \frac{\partial w}{\partial \tau} + \delta \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (17)$$

式中  $\beta$ —质量比;  $\tau$ —无量纲时间;  $v$ —无量纲流动速度;  $\alpha$ —无量纲延滞时间。

### 3 结束语

运用 D' Alembert 原理, 引入 Kelvin 模型的微分算子, 得到了轴向流动中 Kelvin 模型粘弹性圆柱体的运动微分方程, 最后再引入无量纲量将 Kelvin 模型粘弹性圆柱体的微分方程化为无量纲方程, 为轴向流动中粘弹性圆柱体的动力特性分

(上接第 13 页)

4) 采用快速标量法计算的 Rayleigh 波相速度比薄层刚度法计算的值大, 但是随着频率的增大, 二者的差异逐渐减小。

5) 在频率较小时, 尤其是在 50Hz 内, 当相速度趋于层剪切波速最大值时, 快速标量法的曲线不规则, 并出现多条曲线。相反, 薄层刚度法则趋于层剪切波速最大值。因此, 在零频率附近薄层刚度法的计算效果优于快速标量法。

6) 对于瑞雷波相速度最小值, 两类方法差异性不大, 均接近层剪切波速最小值。

### 4 结论

1) 快速标量法计算频散曲线的速度比较快, 并且它避免了一些不必要的虚数运算, 大大提高了计算的稳定性。

2) 与快速标量法相比, 薄层刚度矩阵法可做复数运算, 可以更好地考虑介质阻尼对模态传播特性影响, 此外薄层刚度矩阵法可避免传递矩阵连乘导致的数值不稳定, 但该方法要求所细化的薄层厚度要远小于波长, 因此计算速度会受到一定的限制。

3) 经计算发现在低频阶段薄层刚度法计算效果优于快速标量法, 在高频区域二者差别不大。

4) 与快速标量法相比, 薄层刚度法进行简化后, 可以利用特征值求出频率波速对应关系, 计算

析奠定了基础。

### 参考文献:

- [1] GRIFFIN O M, SKOP R A, KOOPMANN G H. The vortex - excited resonant vibrations of circular cylinder [J]. Journal of Sound and Vibration, 1973(31): 235- 249.
- [2] ZHOU C Y, SO R M C, LAM K. Vortex- induced vibration of an elastic circular cylinder [J]. Journal of Fluids and Structure, 1999(13): 165- 189.
- [3] CHEN S S (美), 圆柱结构的流体诱发振动[M]. 冯振宇, 张希农, 译. 北京: 石油工业出版社, 1988.
- [4] 倪振华. 振动力学[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [5] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.

(责任编辑 刘存英)

简便。

### 参考文献:

- [1] 凡友华, 刘家琦. 层状介质中瑞雷面波的频散研究 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2001, 33(5): 577- 581.
- [2] 凡友华, 肖柏勋, 刘家琦. 层状介质中轴对称柱面瑞利面波频散函数的计算 [J]. 地震工程与工程振动, 2001, 21(3): 1- 5.
- [3] 凡友华, 肖柏勋, 刘家琦. 计算层状介质中轴对称柱面瑞利面波频散函数的  $\delta$  矩阵法 [J]. 物探与化探, 2001, 25(2): 109- 115.
- [4] 柴华友. 弹性介质中表面波理论及其在岩土工程中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [5] 王赞文. 瑞雷面波法正反演及应用研究 [D]. 西安: 长安大学, 2005.
- [6] 吴燕青, 杨天春. 瑞利波频散曲线的反演 [J]. 煤炭学报, 2008, 33(10): 1097- 1101.
- [7] HASKELL N A. The dispersion of surface waves on multilayered media [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1953(43): 17- 34.
- [8] KNOPOFF L. A matrix method for elastic wave problem [J]. Bull Seism Soc Am, 1964, (54): 431- 438.
- [9] SCHWAB F, KNOPOFF L. Surface wave dispersion computations [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1970, 60(2): 321- 344.
- [10] 张碧星, 喻明, 熊伟, 兰从庆. 层状介质中的声波场及面波研究 [J]. 声学学报, 1997, 22(3): 230- 241.

(责任编辑 刘存英)