第28卷 第3期　　河北工程大学学报(自然科学版)　　Vol.28 No.3
2011年9月　　Journal of Hebei University of Engineering (Natural Science Edition)　　Sept.2011

文章编号:1673-9469(2011)03-0111-02

具连续变量高阶中立型差分方程的渐近性

孙 静,刘志民
(河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038)

摘要:研究了一类具有连续变量的高阶中立型时滞差分方程 $\Delta^d(x(t)+q(t)x(t-\tau))+p(t)f(x(t-\delta(t)))=0$ 的渐近性。在 $\{x(t)\}$ 是方程的有界非振动解的假设下,通过变换引理中的三个条件,得到 $\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$ 或 $t\to\infty$ 时,$\{x(t)\}$ 收敛于某有限数值,从而认为该方程具有渐近性。

关键词:中立型差分方程;渐近性;连续变量

中图分类号: O175.7　　**文献标识码**:A

Asymptotic behavior of higher order neutral difference equation with continuous arguments

SUN Jing, LIU Zhi-min
(College of Sciences, Hebei Engineering University, Hebei Handan 056038, China)

Abstract: The asymptotic behavior of higher order neutral difference equations with continuous arguments $\Delta^d(x(t)+q(t)x(t-\tau))+p(t)f(x(t-\delta(t)))=0$ was studied. It showed that the formula was asymptotic in that the $\{x(t)\}$ converge to a certain finite value when $\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$ or $t\to\infty$ by transforming the three conditions in Lemma to get the asymptotic equation under the assumption of non-oscillatory solution.

Key words: neutral difference equation; asymptotic behavior; continuous arguments

随着医学,生物数学,现代物理等自然科学和边缘学科的发展,出现了许多由差分方程描述的具体数学模型。近年来,在具有离散变量的差分方程的解的振动性研究方面的论文比较丰富[1-3],而具有连续变量的高阶差分方程渐近性的研究还不多,文献[4]主要研究了一类高阶方程的振动性,且给出了非振动解的渐近性的一个充分条件,严秀坤在文献[5]中以离散 Knesor 定理为基础讨论了一类高阶变系数非线性中立型差分方程的渐近性,本文应用反证法和数学归纳法,考虑具有连续变量的高阶差分方程的渐近性。

1 基本引理

$$\Delta^d(x(t)+q(t)x(t-\tau))+p(t)f(x(t-\delta(t)))=0 \tag{1}$$

式中 $\tau>0$ 是步长。

对于方程(1),

$\Delta_\tau x(t)=x(t+\tau)-x(t)$

$\Delta_\tau^d(x(t))=\Delta_\tau^{d-1}(\Delta_\tau x(t))$

$p(t)\in C([t_0,+\infty),R^+)$, $\delta(t)\in R$,

$\lim_{n\to+\infty}(t-\delta(t))=+\infty$, $f\in C(R,R)$。

令

$$z(t)=x(t)+q(t)x(t-\tau) \tag{2}$$

函数 $\{y(t)\}$ 称为方程(1)的解,如果 $y\in C([t_0-\delta(t_0),+\infty),R)$,当 $t\ge t_0$ 时,$\{y(t)\}$ 满足方程(1)。

首先给出下列条件:

(A) $uf(u)>0,u\neq0$

(B) 对某个 $t\ge t_0$,有 $\sum_{i=1}^{+\infty}p(t+i\tau)=+\infty$

(C) $0\le q(t)\le 1$

引理1 若 $\{x(t)\}$ 是方程(1)的一个有界最终正解,设条件(A)和(C)成立,则当 d 是奇数时

收稿日期:2011-04-22
作者简介:孙静(1981-)女,河北邯郸人,助教,从事差分方程理论方面的研究。

$$\Delta_\tau^{d-1}z(t)>0,\Delta_\tau^{d-2}z(t)<0,\cdots,\Delta_\tau z(t)<0 \quad (3)$$

则当 d 是偶数时

$$\Delta_\tau^{d-1}z(t)>0,\Delta_\tau^{d-2}z(t)<0,\cdots,\Delta_\tau z(t)>0 \quad (4)$$

2 主要结果及其证明

定理1 若$\{x(t)\}$是方程(1)的有界非振动解,设条件(A),(B),(C)成立,函数$f(u)$单调非减,且 d 是奇数,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

证明 不妨设$\{x(t)\}$是方程(1)的一个最终正解,则存在充分大的自然数 $t_1\geq t_0$,使得式(3)成立,又由条件(A)可知

$$\Delta_\tau^{d-1}z(t)=-p(t)f(x(t-\delta(t)))\leq 0,t\geq t_1$$

成立。因为 d 是奇数,由引理1可知式(3)和

$$\lim_{n\to+\infty}\Delta_\tau^{d-1}z(t+n\tau)=l_1\geq 0 \quad (5)$$

成立。

由 $\Delta_\tau z(t)<0$ 知$\{z(t)\}$最终单调递减,当 $t\to+\infty$时,$\{z(t)\}$存在有限的非负极限;由条件(C)和式(2)知,$\{x(t)\}$也存在有限的非负极限 l_1,即

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=l_1\geq 0 \quad (6)$$

如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=l_2\geq 0$,则存在自然数 n_1,使得

$$0<l_2<x(t+n\tau-\delta(t+n\tau)),n\geq n_1$$

由于函数 $f(u)$是单调非减的及条件(A),有

$$f(x(t+n\tau-\delta(t+n\tau)))\geq f(l_2)>0,n\geq n_1$$

从而由方程(1)有

$$\Delta_\tau^{d}z(t+n\tau)=-p(t+n\tau)f(x(t+n\tau-\delta(t+n\tau)))\leq -f(l_2)p(t+n\tau),n\geq n_1$$

将上式的两边对 n 从n_1 到 n 求和,得

$$\Delta_\tau^{d-1}z(t+(n+1)\tau)-\Delta_\tau^{d-1}z(t+n_1\tau)\leq -f(l_2)\sum_{i=n_1}^{n}p(t+i\tau)$$

由条件(B)知

$$\Delta_\tau^{d-1}z(t+(n+1)\tau)\to-\infty,(n\to+\infty)$$

这与式(5)矛盾,所以最终 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ 成立。

当$\{x(t)\}$是方程(1)的最终负解时,可同理证明。证毕。

定理2 若$\{x(t)\}$是方程(1)的有界非振动解,设条件(A),(B),(C)成立,函数$f(u)$连续,且 d 是奇数,则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

证明 不妨设$\{x(t)\}$是方程(1)的一个最终正解,则存在充分大的自然数 $t_1\geq t_0$,使得式(3)成立。因为 d 是奇数,由引理1可知式(3)和式(5)成立,再由上面定理可知,式(6)成立。

若 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=l_2\geq 0$,由函数 $f(u)$连续及条件(A)得 $f(l_2)>0$,且存在充分大的自然数 n_1,使得

$$0<\frac{1}{2}f(l_2)<f(x(t+n\tau-\delta(t+n\tau))),n\geq n_1$$

从而由方程(1)有

$$\Delta_\tau^{d}z(t+n\tau)=-p(t+n\tau)f(x(t+n\tau-\delta(t+n\tau)))\leq -\frac{1}{2}f(l_2)p(t+n\tau),n\geq n_1$$

类似于定理2的证明,可知最终有

$$\Delta_\tau^{d-1}z(t+(n+1)\tau)\to-\infty,(n\to+\infty)$$

这与式(5)矛盾,所以最终 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ 成立。

当$\{x(t)\}$是方程(1)的最终负解时,可同理证明。

定理3 若$\{x(t)\}$是方程(1)的有界非振动解,设条件(A)成立,且 d 是偶数,则 $t\to\infty$ 时,$\{x(t)\}$收敛于某有限数值。

证明 不妨设$\{x(t)\}$是方程(1)的有界正解,则由引理1得 $\Delta_\tau z(t)>0$ 最终成立。所以$\{z(t)\}$是最终单调递增的,又因为$\{x(t)\}$有界,因而$\{z(t)\}$有界,所以 $t\to+\infty$ 时,$\{z(t)\}$存在正的有限极限,从而$\{x(t)\}$存在正的有限极限。

当$\{x(t)\}$是方程(1)的有界负解时,可类似证明$\{x(t)\}$存在有限的负极限。证毕。

3 结论

$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ 或 $t\to\infty$ 时,$\{x(t)\}$收敛于某有限数值,表明具有连续变量的高阶中立型时滞差分方程 $\Delta^d(x(t)+q(t)x(t-\tau))+p(t)f(x(t-\delta(t)))=0$ 具有渐近性。

参考文献:

[1] 韩振来, 李秀珍, 从今明, 等. 一类具有连续变量的三阶非线性时滞差分方程的振动性判据[J]. 济南大学学报: 自然科学版, 2003, 17(4): 334-336.

[2] 孙书荣, 韩振来. 一类具有连续变量的二阶中立型差分方程的振动性[J]. 工程数学学报, 2005, 22(5): 943-946.

[3] 刘志民, 孙 静. 具有连续变量二阶中立型差分方程的振动性及其有界解[J]. 河北工程大学学报: 自然科学版, 2009, 26(2): 109-110.

[4] 唐清干, 曾 玲. 高阶中立型差分方程的振动性及其非振动解的渐近性态[J]. 数学杂志, 2000(20): 207-210.

[5] 严秀坤, 张卓飞. 高阶非线性中立型差分方程的渐近性态[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2006, 28(1); 20-23.

(责任编辑 马立)