

文章编号: 1673 - 9469(2012) 01 - 0107 - 02

ν 为偶数时 $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - 奇图的计数定理

李明超 霍京京

(河北工程大学 理学院 河北 邯郸 056038)

摘要: 对任意偶数 ν 考虑当 $0 \leq s \leq 3$ 时 $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - 奇图的计数 结合 F. Harary 在 [5] 中列举的有 p ($1 \leq p \leq 6$) 点图的分解, 通过构造一种新的由星图 $\bullet_{a_1}, \bullet_{a_2}, \dots, \bullet_{a_m}$ 构成的图 $G_{a_1 a_2 \dots a_m}$, 利用度序列的不同安排给出了不同构 $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - 奇图的计数结果。

关键词: 星图; 度序列; 图的分解; 不同构图

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

Enumeration theorem of $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - odd graph for any ν even

LI Ming - chao , HUO Jing - jing

(College of Sciences , Hebei University of Engineering , Handan Hebei 056038 , China)

Abstract: For any ν even , we study the enumeration of $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - odd graph for $0 \leq s \leq 3$. Combining with the decomposition of graph with p ($1 \leq p \leq 6$) vertices , we construct a new graph $G_{a_1 a_2 \dots a_m}$ constituted by star graphs $\bullet_{a_1}, \bullet_{a_2}, \dots, \bullet_{a_m}$, through the arrangement of degree array , we propose the enumeration theorem of nonisomorphic $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - odd graph according to different degree array.

Key words: star graph; degree array; graph decomposition; nonisomorphic graph

一个有 p 个点和 q 条边的图称为 (p, q) - 图, 若顶点的度均为偶数, 则称为 (p, q) - 欧拉图, 也可以定义每点度数均为奇数的图 称为 (p, q) - 奇图. R. Read 等^[1-2]从 1962 年开始研究了 (p, q) - 欧拉图和 (p, q) - 奇图的计数, C. Nara 等^[3]给出了具有特定属性无标号图的计数, M. Li 等^[4]研究了 $(10, 10)$ - 欧拉图的计数。笔者试图研究 ν 个点 (ν 为偶数) $\frac{\nu}{2} + s$ 条边的奇图, 即 $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - 奇图, 并在 $0 \leq s \leq 3$ 时给出不同构的计数结果。F. Harary 曾在文献 [5] 中列举出了 p ($1 \leq p \leq 6$) 点图的分解, 笔者用 \bullet_a 表示星图 $K_{1, a}$, 这是一个 $(a + 1, a)$ - 图, 称其中度为 a 的点为中心点。定义一种新的由星图 $\bullet_{a_1}, \bullet_{a_2}, \dots, \bullet_{a_m}$ 构成的图 $G_{a_1 a_2 \dots a_m}$, 规定其中出现的中心点 (标记为 \bullet_a) 之

间或者没有连边, 或者只在中心点之间有连边, 且始终保持中心点的度数不变。

1 $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - 奇图的度序列

引理 1 若图 $(\nu \frac{\nu}{2} + s)$ - 的中心点之间有 t 条边相连, 则图 $G_{a_1 a_2 \dots a_m}$ 是一个 $(a_1 + a_2 + \dots + a_m + m - 2t, a_1 + a_2 + \dots + a_m - t)$ - 图。

证明: 显然当 $G_{a_1 a_2 \dots a_m}$ 的中心点之间没有连边时, 星图 $\bullet_{a_1}, \bullet_{a_2}, \dots, \bullet_{a_m}$ 相互之间没有连边, 故有 $(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \dots + (a_m + 1) = a_1 + a_2 + \dots + a_m + m$ 个点, 有 $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ 条边, 若上述中心点之间有 t 条边相连, 由于中心点的度数保持不

收稿日期: 2011 - 09 - 12

基金项目: 河北省自然科学基金项目 (A2007000230); 邯郸市科技局科学技术研究与发展计划项目 (1031201125 - 6) 特约专稿

作者简介: 李明超 (1980 -) 男, 河北邯郸人, 讲师, 博士研究生, 从事组合设计与编码方面的研究。

变,则中心点之间每增加一条边,图 G_{a_1, a_2, a_m} 的点数就减少 2,边数就减少 1,故点数减少 $2t$ 个,边数减少 t 条,所以 G_{a_1, a_2, a_m} 是一个 $a_1 + a_2 + \dots + a_m + m - 2t, a_1 + a_2 + \dots + a_m - t$ - 图。

以下给出的 G_{a_1, a_2, a_m} 的星图表示中,仅标出下标 $a_i > 1 (1 \leq i \leq m)$ 的星图 \bullet_{a_j} ,其余未标出的星图均为下标值为 1 的星图,且 $\bullet_{a_j} \bullet_{a_k}$ 表示星图之间没有连边, $\overset{\curvearrowright}{a_i} \bullet_{a_i}$ 表示星图的中心点之间有一条边相连。对于 $(v, \frac{v}{2} + s)$ - 奇图,设 d_i 表示第 i 个点的度数, $i = 1, 2, \dots, v$, 则有

$$d_1 + d_2 + \dots + d_v = 2(\frac{v}{2} + s) = v + 2s$$

将度数 $v + 2s$ 排列为 v 个点的度序列 (d_1, d_2, \dots, d_v) , 因为每点的度均为奇数,故 $d_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, v$ 。每点的度先取 1 后剩余的等式左端的度均取偶数,而等式右端剩余的 $2s (0 \leq s \leq 4)$ 按照左端度数的要求展开如下:

$$0 = 0 + \dots + 0 \tag{1}$$

$$2 = 2 + 0 + \dots + 0 \tag{2}$$

$$4 = 4 + 0 + \dots + 0 = 2 + 2 + 0 + \dots + 0 \tag{3}$$

$$6 = 6 + 0 + 0 + \dots + 0 = 4 + 2 + \dots + 0 = 2 + 2 + 2 + 0 + \dots + 0 \tag{4}$$

$$8 = 8 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 6 + 2 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 4 + 4 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 4 + 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 2 + 2 + 2 + 2 + 0 + \dots + 0. \tag{5}$$

将上式等号右端的度数分别加 1 可得到所有不同的度序列安排。

2 主要结论

定理 1 当 $v \geq 2$ 时, $(v, \frac{v}{2})$ - 奇图只有 1 个; 当 $v \geq 4$ 时, $(v, \frac{v}{2} + 1)$ - 奇图只有 1 个。

证明: 由(1)式知, $(v, \frac{v}{2})$ - 奇图的度序列为 $(1, 1, \dots, 1)$, 即为图的分解。

由(2)式知, $(v, \frac{v}{2} + 1)$ - 奇图的度序列为 $(3, 1, \dots, 1)$, 用星图表示为 \bullet_3 。此时星图 \bullet_3 占有 4 个点, 故总点数 $v \geq 4$ 。

定理 2 对于 $(v, \frac{v}{2} + 2)$ - 奇图

- 1) 当 $v \geq 8$ 时有 3 个不同构图;
- 2) $v = 6$ 时有 2 个不同构图;

3) 不存在 $(2, 3)$ - 奇图和 $(4, 4)$ - 奇图。

证明: 由(3)式知, $(v, \frac{v}{2} + 2)$ - 奇图的度序列为 $(5, 1, \dots, 1), (3, 3, 1, \dots, 1)$, 序列 $(5, 1, \dots, 1)$ 对应度数为 5 的 1 个点的图的分解, 只有 1 种。序列 $(3, 3, 1, \dots, 1)$ 对应度数均为 3 的两点图的分解, 在文献[5]中 $p = 2$ 对应的图解中进行安排有 2 种, 用星图表示有 3 个:

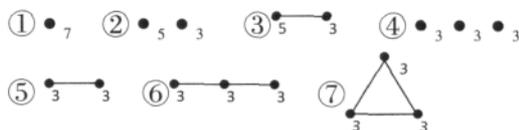


由引理 1 知, 情况①和③中的星图占有 6 个点, 情况②中的星图占有 8 个点, 故总点数 $v \geq 8$ 时有 3 个不同构 $(v, \frac{v}{2} + 2)$ - 奇图, 总点数 $v = 6$ 时有 2 个不同构 $(v, \frac{v}{2} + 2)$ - 奇图。而 $(2, 3)$ - 奇图和 $(4, 4)$ - 奇图不存在。

定理 3 对于 $(v, \frac{v}{2} + 3)$ - 奇图

- 1) 当 $v \geq 12$ 时有 7 个不同构图;
- 2) $v = 10$ 时有 6 个不同构图;
- 3) $v = 8$ 时有 4 个不同构图;
- 4) $v = 6$ 时有 1 个不同构图;
- 5) 不存在 $(2, 4)$ - 奇图和 $(4, 5)$ - 奇图。

证明: 由(4)式知, $(v, \frac{v}{2} + 3)$ - 奇图的度序列为 $(7, 1, \dots, 1), (5, 3, 1, \dots, 1), (3, 3, 3, 1, \dots, 1)$, 序列 $(7, 1, \dots, 1)$ 对应度数为 7 的 1 个点的图的分解, 只有 1 种。序列 $(5, 3, 1, \dots, 1)$ 对应度数为 5 和 3 的两点图的分解, 在文献[5]中 $p = 2$ 对应的图解中进行安排, 有 2 种。序列 $(3, 3, 3, 1, \dots, 1)$ 对应度数均为 3 的三点图的分解, 在文献[5]中 $p = 3$ 对应的图解中进行安排, 有 4 种, 用星图表示如下, 共有 7 个。



由引理 1 知, 情况⑦中的星图占有 6 个点, 情况①、③、⑥中的星图占有 8 个点, 情况②和⑤中的星图占有 10 个点, 情况④中的星图占有 12 个点, 故总点数 $v \geq 12$ 时有 7 个不同构 $(v, \frac{v}{2} + 3)$ - 奇图, 总点数 $v = 10$ 时有 6 个不同构 $(v, \frac{v}{2} + 3)$ - 奇图。总点数 $v = 8$ 时有 4 个不同构 $(v, \frac{v}{2} + 3)$ - 奇图。总点数 $v = 6$ 时有 1 个不(下转第 112 页)

从表3中可以看出,在不确定性数据中,ARI的值与学生成绩的移动距离有关。当学生成绩的移动距离越大,则聚类相似度就越小;反之,学生成绩的移动距离越小,则聚类相似度就越大。并把算法在教学管理实际中的应用。

4 结束语

本文给出基于不确定性数据的聚类算法,分别就基于划分的和基于密度的聚类算法给出目前基本思想、优缺点,并就基于划分的和密度的算法进行对比实验,在教学管理实际中进行应用,可以为教学管理提供有力帮助。

参考文献:

- [1] 周傲英,金澈清,王国仁,等.不确定性数据管理技术研究综述[J].计算机学报.2009,32(1):1-16.
- [2] 杨小兵.聚类分析中若干关键技术的研究[D].杭州:浙江大学计算机学院.2005.
- [3] KRIEGL H P, PFEIFLE M. Density-based clustering of uncertain data [C]//. Proceedings of the 11th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery in Data Mining. Chicago, 2005: 672-677
- [4] KRIEGL H P, PFEIFLE M. Hierarchical density-based clustering of uncertain data [C]//. Proceedings of

5th International Conference on Data Mining. Houston, 2005: 689-692.

- [5] 许华杰,李国徽,杨兵,等.基于密度的不确定性数据概率聚类[J].计算机科学.2009,36(5):68-72.
- [6] M CHAU R, CHENG B, KAO B, et al. Uncertain data mining: An example in clustering location data [C]//. In Pacific Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining 2005: 199-204.
- [7] NGAI W K, KAO B, CHUI C K, et al. Efficient clustering of uncertain data [C]//. Proceedings of the 6th International Conference on Data Mining. Hong Kong, 2006: 436-445.
- [8] CORMODE G, MCGREGOR A. Approximation algorithms for clustering uncertain data [C]//. Proceedings of the 27th ACM SIGMOD-SIGACT-SIGART Symposium on Principles of Database Systems. Vancouver, 2008: 191-200.
- [9] STONEBRAKER M, FREW J, GARDELS K, et al. The SEQUOIA 2000 Storage Benchmark [C]//. The 1993 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. Washington, 1993: 56-98.
- [10] YEUNG K, RUZZO W. An empirical study on principal component analysis for clustering gene expression data [J]. Bioinformatics 2001, 17(9): 763-774.

(责任编辑 刘存英)

(上接第108页)

同构 $(v, \frac{v}{2} + 3)$ -奇图。而 $(2, 4)$ 奇图和 $(4, 5)$ 奇图不存在。

3 结语

本文定义一种新的由星图 $\bullet_{a_1}, \bullet_{a_2}, \dots, \bullet_{a_m}$ 构成的图 G_{a_1, a_2, \dots, a_m} ,利用 $(v, \frac{v}{2} + s)$ -奇图的度序列的不同安排,给出了 $0 \leq s \leq 3$ 时的不同构 $(v, \frac{v}{2} + s)$ -奇图的计数结果,利用本方法可进一步研究 $s \geq 4$ 的不同构 $(v, \frac{v}{2} + s)$ -奇图的计数,而不同构 $(v, \frac{v}{2} + s)$ -奇图的计数不仅本身有研究价值,对于图分解、图填充和图覆盖等的研究也具有基

基础性作用,值得进一步研究。

参考文献:

- [1] READ R, Euler graphs on labeled nodes [J]. Canad J Math, 1962 (14): 482-486.
- [2] READ R, ROBINSON R, Enumeration of labelled multi-graphs by degree parities [J]. Discrete Math, 1982 (42): 99-105.
- [3] NARA C, TAZAWA T, Enumeration of unlabelled graphs with specified degree parities [J]. Discrete Math, 1998, 183: 255-264.
- [4] LI M C, HUO J J, et al., Maximum packings and minimum coverings of with octagons [J]. Graphs and Combin, 2009 (25): 735-752.
- [5] HARARY F. Graph theory [M]. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

(责任编辑 马立)