

## 两种并联机构的静刚度及有限元分析

王南<sup>1</sup>, 高鹏<sup>2</sup>, 崔国华<sup>1</sup>, 郝丽红<sup>1</sup>

(1. 河北工程大学 机电学院, 河北 邯郸 056038; 2. 中国科学院 深圳先进技术研究院, 广东 深圳 518055)

**摘要:** 以经典的 3-RPS 和其变异机构 3-SPR 并联机构为例, 建立考虑约束反力两种机构的  $6 \times 6$  形式的雅可比矩阵, 并建立刚度模型。利用实体建模软件 SolidWorks 建立两种并联机构的实体模型, 并利用商用有限元软件 Workbench 对其进行有限元分析, 对比了两种并联机构的变形情况。结果表明 3-SPR 并联机构的刚度性能优于 3-RPS 并联机构的刚度性能, 两种并联机构的 Z 方向刚度均比 X、Y 两个方向的刚度大。

**关键词:** 并联机构; 雅可比矩阵; 刚度模型; 有限元分析

**中图分类号:** TP249

**文献标识码:** A

### The static stiffness of two parallel mechanisms and its finite element analysis

WANG Nan<sup>1</sup>, GAO Peng<sup>2</sup>, CUI Guo-hua<sup>1</sup>, HAO Li-hong<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical and Electrical Engineering, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China;  
2. Shenzhen Institutes of advanced Technology, Chinese Academy of Sciences, Guangdong Shenzhen, 518055, China)

**Abstract:** Taking classic 3-RPS and its variation institutions 3-SPR parallel mechanism as an example, this paper establish two institutions forms of jacobian matrix with  $6 \times 6$  form considering constraining anti-forces, and establish the stiffness model. The entity model of two parallel mechanism were established by using SolidWorks software, and the finite element analysis were carried out by using Workbench software, this paper analyzes the deformation situation of two parallel mechanism. The results show that the stiffness of 3-SPR was better than 3-RPS parallel mechanism and the stiffness of Z-direction has the better performance than the other two directions.

**Key words:** parallel mechanism; jacobian matrix; stiffness model; finite element analysis

并联机构的刚度是并联机构性能的重要指标, 并且为并联机构的设计提供重要理论依据。对并联机构的建立精确的刚度模型, 成为近年来研究学者的研究重点。陈吉清等<sup>[1]</sup>利用螺旋矢量法建立了并联机床刚度的数学模型, 并对并联机床动态性能进行了分析。吕亚楠等<sup>[2]</sup>利用有限元法研究了一种冗余并联机床的静刚度。李育文等<sup>[3]</sup>用有限元法分析了一种 6-UPS 并联机床静刚度, 并且考虑了并联机床的支链和机架的变形。王友渔等<sup>[4]</sup>借助子结构综合思想和 Ansys 参数化设计语言, 构造了 Trivariant 和 Tricept 两种机械手

的有限元模型, 充分考虑了机构中各种铰链对并联机构处于不同位形时的整机静、动态特性的有限元快速重构技术。胡波等<sup>[5]</sup>提出了一种将 3-RPS 机构的变形和刚度转化为一个等效无约束反力的 6 自由度并联机构 3-RPPS 的变形和刚度进行分析。

在少自由度并联机构中, 由于机构结构自身的原因, 使得机构内部存在约束力/约束力矩, 从而对整机的刚度精度产生重要影响, 因此在分析中应予以考虑<sup>[6]</sup>。本文就 3-RPS 并联机构及其变种 3-SPR 并联机构建立含约束力/力矩的刚度

模型 并利用商用有限元软件 Ansys Workbench 验证两种并联机构刚度模型的正确性。

### 1 系统简介

3-RPS 并联机构是三自由度并联机构。由上下 2 个平台以及 3 个支链组成。其中 3 条支链由 R、P、S 3 个运动副组成,支链通过 R 副与定平台相连,另一端通过 S 副与动平台相连,其中驱动力由 P 副提供。三条支链平均分布将动、定平台连接起来(图 1-a)。3-SPR 并联机构是 3-RPS 并联机构的变异模型,上、下两个平台通过 3 个 SPR 支链连接。一端由 S 副连接定平台,另一端由 R 副连接动平台。其中 P 副提供动力输出(图 1-b)。

#### 1.1 位置逆解

图 2 为两种并联机构的机构简图。建立笛卡尔直角坐标系  $B-XYZ$ ,以定平台的中心点为坐标系原点  $B$ , $X$  轴平行  $BB_1$  且方向向右, $Y$  轴沿  $BB_2$

方向, $Z$  轴垂直于面  $B_1B_2B_3$  且向上。以动平台的中心点  $A$  建立动坐标系  $A-uvw$ , $u$  轴方向  $AA_1$  且方向向右, $v$  轴沿  $AA_2$  方向, $w$  轴垂直于面  $A_1A_2A_3$  且向上。

设定  $A$  点的初始坐标为  $(0, 0, H)$ ,动平台的任一位置可描述为动平台绕  $u$  轴旋转  $\alpha$ ,绕  $v$  轴旋转  $\beta$ , $w$  方向的位移  $Z_A$ 。

封闭向量  $L_i$  为

$$L_i = q_i l_i = {}^A_B T \cdot A_i - r_{B_i} \quad (1)$$

式中: $q_i$  - 杆长; $l_i$  - 沿杆方向的矢量; $A_i$  - 点  $A_i$  在  $B-XYZ$  坐标系中的位矢; ${}^A_B T$  - 动平台上  $A_i$  的坐标变化齐次矩阵。

$${}^A_B T = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\beta c\gamma s\alpha - s\gamma c\alpha & s\beta c\gamma s\alpha = s\gamma s\alpha & X_A \\ s\gamma c\beta & s\gamma s\beta s\alpha + c\gamma c\alpha & s\gamma s\beta c\alpha - c\gamma s\alpha & Y_A \\ -s\beta & c\beta s\alpha & c\beta c\alpha & Z_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

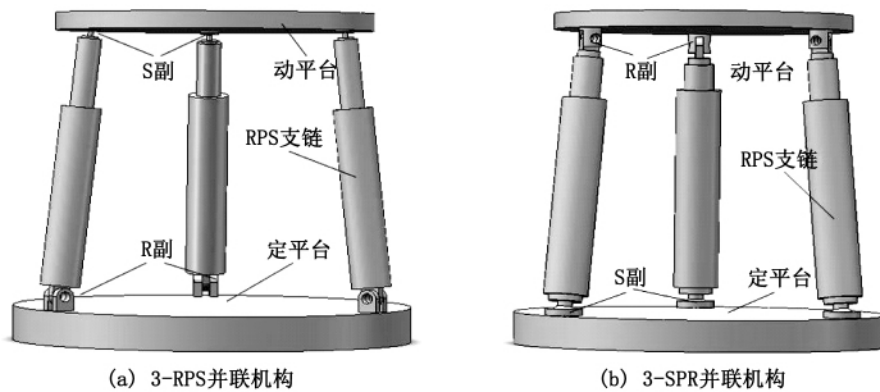


图1 两种并联机构的结构图  
Fig.1 Structure diagram of the two parallel mechanism

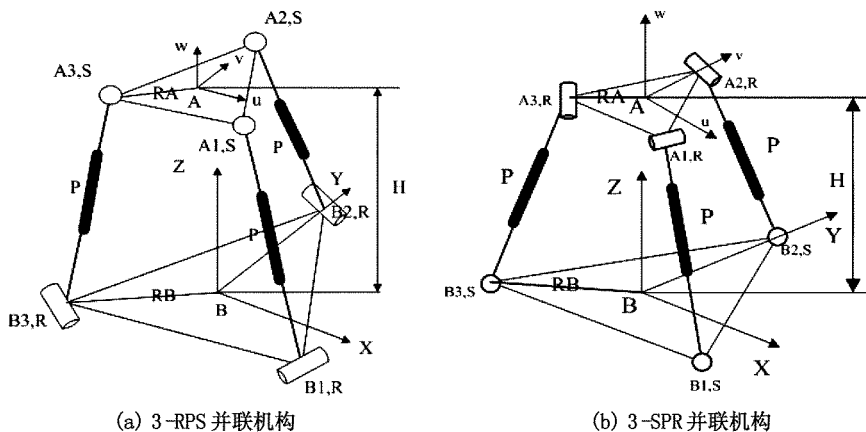


图2 两种并联机构的机构简图  
Fig.2 Schematic diagram of the two parallel mechanism

由于机构本身的约束关系,可以得到

$$\begin{cases} \tan\gamma = \frac{sas\beta}{c\alpha + c\beta} \\ X_A = \frac{r(c\beta c\gamma - sas\beta s\gamma - c\alpha c\gamma)}{2} \\ Y_A = r(c\alpha\gamma - c\gamma as\beta) \end{cases} \quad (3)$$

联立式(1)、式(2)、式(3)得杆长  $q_i$  为

$$q_i = \|L_i\| \quad l_i = \frac{L_i}{q_i} \quad (4)$$

### 1.2 雅可比矩阵的求解<sup>[7]</sup>

设动平台的速度为  $V$ , 则

$$V = [v, \omega]^T, v = [v_x, v_y, v_z]^T, \omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

设输入的速度为  $\dot{q}_i$ ,  $r$  球铰各点相对于动平台中心点的矢径为

$$\dot{q}_i = l_i v_{pi} \quad (5)$$

$$v_{pi} = v + \omega \times r \quad (6)$$

$$\dot{q}_i = l_i \cdot (v + \omega \times r) \quad (7)$$

则微动平台的驱动映射雅可比矩阵  $J_A$  为

$$J_A = \begin{bmatrix} L_1^T (r_1 \times l_1)^T \\ L_2^T (r_2 \times l_2)^T \\ L_3^T (r_3 \times l_3)^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

$r_i$  球铰各点相对于动平台中心点的矢径

球铰点  $S$  的速度矢量<sup>A</sup> $V_i$ 可表示为

$${}^A V_i = V + \omega \times r_i \quad (9)$$

${}^A V_i$ 在  $R$  的投影  $V_{ui} = 0$ , 可得

$$0 = {}^A V_i \cdot u_i \Leftrightarrow u_i^T (r_i \times u_i)^T \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (10)$$

则可得到约束映射矩阵  $J_C$

$$J_C = \begin{bmatrix} u_1^T (r_1 \times u_1)^T \\ u_2^T (r_2 \times u_2)^T \\ u_3^T (r_3 \times u_3)^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

并可得到完整的映射矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_A \\ J_C \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 1.3 刚度矩阵的求解

各分支在驱动力  $F_{ai}$  和约束反力  $F_{pi}$  的作用下产生变形, 设约束反力  $F_{pi}$  产生的变形  $\delta_{ri}$  沿  $r_i$  方向, 可以得到

$$F_{ai} = s_i \delta_{ai} \quad k_i = \frac{E_e A}{r_i} \quad (13)$$

式中:  $A$  - 杆的横截面积;  $E_e$  - 弹性模量;  $k_i$  - 各分支的刚度系数。

由于  $\delta_{ri}$  很小, 其方向可以看作是沿  $F_{pi}$  方向, 也就是  $R$  副的方向, 可知

$$F_{pi} = s_i \delta_{ri} \quad (i = 1, 2, 3) \quad \delta_{ri} = \frac{3E_e I}{r_i^3} \quad (14)$$

式中:  $E_e I$  - 分支的弯曲刚度;  $I$  - 分支的惯性矩。

$$\text{由 } F_r = K_p \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta d \end{bmatrix} \quad (15)$$

得到机构的刚度矩阵  $K$  为

$$K = J^T K_p J \quad (16)$$

$$K_p = \begin{bmatrix} \frac{E_e A}{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_e A}{r_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_e A}{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3E_e I}{r_1^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3E_e I}{r_1^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3E_e I}{r_3^3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

由于 3-SPR 并联机构与 3-RPS 的结构类似, 推导雅可比矩阵的过程同上。在刚度模型中, 由于  $S$  副位于其支链的下面, 其变形情况也与 3-RPS 类似, 推导过程略。

## 2 数值算例

给定参数  $RB = 100 \text{ mm}$ ,  $RA = 80 \text{ mm}$ , 初始高度  $H = 75 \text{ mm}$ ,

$$F = [10 \quad -15 \quad 20]^T, T = [-20 \quad 10 \quad 15]^T, E = 2.11 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, I = 1.256 \times 10^{-7} \text{ m}^4.$$

由两种并联机构的静刚度可以发现(表 1)  $Z$  方向的刚度值总比其它两个方向大, 并且 3-SPR 并联机构的刚度比 3-RPS 的刚度要大。

## 3 有限元分析

并联机构的刚度模型是位形的函数, 因此在应用有限元软件对并联机构分析时, 定会针对不同位形对并联机构进行有限元分析<sup>[8]</sup>。利用 Solidworks 三维实体建模软件建立两种并联机构的实体模型, 利用软件自身的装配将并联机构按

照实际情况装配到一起。根据杆长,将并联机构调整到需要的位姿,然后导入到 Ansys Workbench 中,按照并联机构的运动副设置其连接条件。两种并联机构的材料按照弹性模量  $E = 2.11 \times 10^{11}$  Pa,泊松比  $\gamma = 0.3$ ,屈服极限  $\delta = 350$  MPa。整机模型采用四面体和六面体单元划分网格,单元数目为 14 368,节点数为 51 153。外载荷  $F = [10 \quad -15 \quad 20]$  N,  $M = [-20 \quad 10 \quad 15]$  N/m。

表 2 中列出了两种并联机构在不同位形时的

变形情况。结合表 1 可以看到理论分析值与有限元分析的结果的极为相近,说明刚度模型的准确性。纵向对比表 2 中位置 I 位置 II 位置 III 的变形云图 Z 方向的刚度总比其余两个方向大,即两种并联机构承受 Z 方向载荷能力强于其余两个方向。从两种并联机构的 X 方向变形云图中可以看出,两种并联机构在不同位形时 3-SPR 并联机构在 X 方向的刚度均略大于 3-PRS,跟理论分析的结果一致。

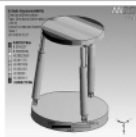
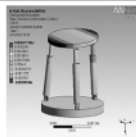
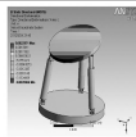
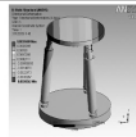
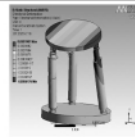
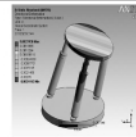
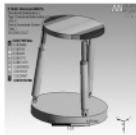
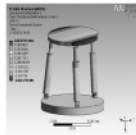
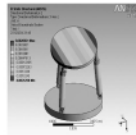
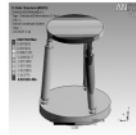
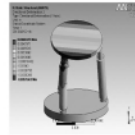
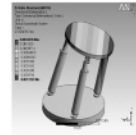
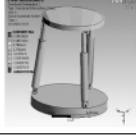
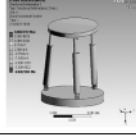
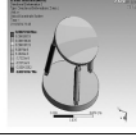

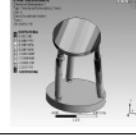

表 1 两种并联机构静刚度

Tab. 1 Static stiffness of the two parallel mechanism N/m<sup>2</sup>

坐标方向	3-RPS 并联机构			3-SPR 并联机构		
	位置 I	位置 II	位置 III	位置 I	位置 II	位置 III
X 方向	1.283e-06	7.490e-06	1.424e-06	1.283e-06	7.490e-06	1.424e-06
Y 方向	9.891e-06	1.026e-06	3.656e-06	9.891e-06	1.026e-06	3.656e-06
Z 方向	1.023e-08	1.436e-07	1.017e-07	1.023e-08	1.436e-07	1.017e-07

表 2 两种并联机构各向变形云图

Tab. 2 Each direction deformation of the two parallel mechanism

变形	3-RPS 并联机构			3-SPR 并联机构		
	位置 I	位置 II	位置 III	位置 I	位置 II	位置 III
X 方向						
Y 方向						
Z 方向						

### 4 结论

有限元软件验证结果表明 3-SPR 并联机构的刚度性能优于 3-RPS 并联机构的刚度性能,两种并联机构的 Z 方向刚度均比 X、Y 两个方向的刚度大。

### 参考文献:

[1] 陈吉清,兰凤崇. Stewart 并联机床瞬时刚度分析与应用[J]. 南京理工大学学报,2007,31(4):482-486.  
 [2] 吕亚楠,王立平,关立文,等. 一种冗余并联机床静刚度有限元分析与优化设计[J]. 机械设计与制造,2008,2(2):1-3.  
 [3] 李育文,张华,杨建新,等. 6-UPS 并联机床静刚度的有限元分析和实验研究[J]. 中国机械工程,

2004,15(2):112-115

[4] 王友渔,赵兴玉,黄田,等. 可重构混联机械手 Trivariant 和 Tricept 的静动态特性预估与比较[J]. 天津大学学报,2007,40(1):41-45.  
 [5] 胡波,路懿. 求解 3-RPS 并联机构刚度的新方法[J]. 机械工程学报,2010,46(1):24-29.  
 [6] 刘树青,吴洪涛. 一种新型起重机器人的运动学分析与应用[J]. 河北科技大学学报,2004,25(2):58-61.  
 [7] 王南,张莉婷,郝莉红. 空间 3-UPU/UPU 机构的刚度分析[J]. 河北工程大学学报:自然科学版,2012,29(3):85-87.  
 [8] LU Y, HU B. Analyzing kinematics and solving active/constrained forces of a 3SPU + UPR parallel manipulator[J]. Machine and Mechanism Theory, 2007, 42(10): 1298-1313.

(责任编辑 马立)