

文章编号:1673-9469(2013)02-0004-05

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2013.02.002

## 边界不同恒温时功能梯度板平面稳态温度场

许杨健<sup>1</sup>,王飞<sup>1</sup>,杜海洋<sup>1,2</sup>,任鹏飞<sup>1</sup>

(1.河北工程大学 土木工程学院,河北 邯郸 056038;2.哈尔滨工业大学 航天学院,黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘要:**假设热导率沿功能梯度板高呈指数函数形式分布,基于该板的平面稳态热传导基本方程,用分离变量法,导出边界不同恒温时该板的平面稳态温度场的级数解析解,与有限元解对比,两种方法的最大节点温度误差0.86%。通过数值计算,获得了该板的平面稳态温度场分布,研究了板的梯度参数和几何组成对温度场的影响。主要结果表明:板内的温度场分布对称于过形心的y轴;随着梯度参数值的增加,板内的高温区向左右两边界和下边界逐步扩展;随着板高的递减,板内中下部的温度分布趋于平缓。因此,可选择适合的梯度参数和几何组成来满足设计、应用和热应力分析的需要,所获得的解析解可作为检验其他近似方法的参考标准。

**关键词:**功能梯度板;平面稳态温度场;分离变量法;边界恒温;梯度参数;几何组成

**中图分类号:**TB330.1;TK124

**文献标识码:**A

## Plane steady temperature fields in a FGM plate subjected to boundary different constant temperatures

XU Yang-jian<sup>1</sup>, WANG Fei<sup>1</sup>, DU Hai-yang<sup>1,2</sup>, REN Peng-fei<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China;

2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Heilongjiang Harbin 150001, China)

**Abstract:**The heat conductivity in the FGM plate was expressed by exponential function along the height direction of the plate, based on the plane steady heat conduction basic equation of the plate, the series analytical solution of the plane steady temperature fields of in the plate subjected to the different constant temperature of boundary was derived by variable separation method. Compared with FEM, the maximum node temperature error of two methods was 0.86%. Through the numerical calculations, the plane steady temperature field distributions in the plate were obtained, and the effects of material gradient parameters and the geometric composition of the plate on the temperature fields were studied. The main results show as follows: (1) The temperature field distribution in the plate is symmetrical to the axis y through the centroid. (2) With the increase of gradient parameter value, the high temperature zone in the plate is extended to the two sides and lower side of plate. (3) With the decreasing of the plate height, central lower temperature distribution in the plate tends gently. Thus, the suitable selection of gradient parameter and geometric composition can meet the need of the design, application and analysis of the thermal stress, and the analytical solution obtained can be used as a reference standard for other approximate methods.

**Key words:**FGM plate; 2D steady temperature fields; variable separation method; boundary different constant temperature; gradient parameters; geometric composition

由于功能梯度材料(简称 FGM)在航空、航天以及核反应堆等超高温工作环境中的应用日益广

泛<sup>[1-2]</sup>,分析该材料组成物体的热传导问题十分重要。赵军等<sup>[3]</sup>用分离变量法推导了 FGM 无限

收稿日期:2012-12-13

基金项目:河北省自然科学基金资助项目(E2010001007, E2011402033)

特约专稿

作者简介:许杨健(1956-),男,四川富顺人,教授,从事新型材料及结构的热机载性能方面的研究。

大平板、圆筒和圆球的一维瞬态热传导解析解;陈建桥等<sup>[4]</sup>用无网格局部彼得罗夫-伽辽金(MLPG)方法研究了变物性FGM的三维瞬态热传导问题;张雁等<sup>[5]</sup>用有限差分法研究了C/C/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> FGM板在第二类热边界作用下的瞬态温度场分布。许杨健等<sup>[6-7]</sup>用有限元法和有限差分法研究了FGM板在第一类和第三类热边界作用下的常物性和变物性瞬态热传导问题。刘五祥等<sup>[8]</sup>用分离变量法结合贝塞尔函数特性,推导了轴对称FGM圆板二维稳态热传导问题的精确解。蓝林华<sup>[9]</sup>等人用分层精细指数法研究了常物性FGM结构的二维稳态热传导问题,该方法通过空间坐标的离散,将二维热传导偏微分方程降解为一系列一维常微分方程的求解问题。Jin Zhihe<sup>[10]</sup>等研究了有限冷却/加热率下FGM板热传导问题的渐近解。Babaei M H等<sup>[11]</sup>研究了FGM圆筒的双曲型热传导问题。Golbahar Haghghi M R等<sup>[12]</sup>研究了多层FGM圆筒的瞬态热传导逆问题。Malekzadeh P等<sup>[13]</sup>用有限元和微分求积法研究了内表面上承受边界移动分布热流的FGM圆筒的瞬态传热问题。本文采用分离变量法推导FGM板的平面稳态热传导的级数解析解,并研究梯度参数和几何组成对温度场的影响,以期可通过选择适合的梯度参数来满足设计、应用和热应力分析的需要。

## 1 研究模型与描述

拟推导图1所示FGM板在边界不同恒温时的平面稳态温度场的解析解。

假设:(1)沿板高的材料性质连续分布;(2)板的上边界为恒温 $U$ K,其余边界均为恒温 $u_0$ K;(3)板内无热源,板的几何尺寸与坐标选择见图1。a,b分别为板的宽和高。

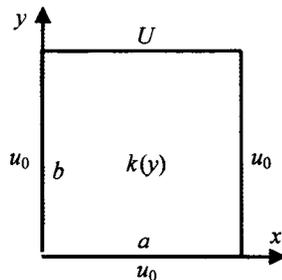


图1 边界不同恒温时的功能梯度板

Fig.1 FGM plate of boundary with different constant temperatures

该板的二维稳态平面热传导微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(y) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k(y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

式中: $k(y)$  - 材料的热导率; $T(x,y)$  - FGM板的温度。

假设材料的热导率沿板高呈指数函数形式分布,即<sup>[14-15]</sup>

$$k(y) = De^{dy} \quad (2)$$

式中: $D$ 为 $y=0$ 处的热导率; $d$ 为 $y$ 方向的梯度参数。为使边界条件齐次化,令

$$T(x,y) = u_0 + W(x,y) \quad (3)$$

$$\text{则 } W(0,y) = 0, W(a,y) = 0 \quad (4)$$

$$W(x,0) = 0, W(x,b) = U - u_0 \quad (5)$$

式中: $W(x,y)$  - 满足热传导方程的函数。

## 2 解析法求解温度场

### 2.1 分离函数

将式(2)和(3)代入式(1),FGM板的热传导微分方程可变化为

$$d \frac{\partial W(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

采用分离变量法,将函数 $W(x,y)$ 分离为 $x,y$ 方向函数乘积形式,即

$$W(x,y) = X(x) \times Y(y) \quad (7)$$

将式(7)代入式(6),可得

$$(dY' + Y'')/Y = -X''/X = \lambda \quad (8)$$

式中: $X', Y'$  - 相应函数的一阶导数; $X'', Y''$  - 相应函数的二阶导数, $\lambda$ 为分离常数。式(8)左边为 $y$ 的函数,右边为 $x$ 的函数,如果两边相等,则应等于 $\lambda$ 。

将式(8)分离成两项函数,并给出相应边界条件,得

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (9a)$$

$$X(0) = 0, X(a) = 0 \quad (9b)$$

$$Y'' + dY' - \lambda Y = 0 \quad (10a)$$

$$Y(0) = 0, Y(b) = U - u_0 \quad (10b)$$

### 2.2 函数 $X(x)$ 的求解

式(9a)的特征方程为

$$r^2 + \lambda = 0 \quad (11)$$

当 $\lambda > 0$ 时,式(9a)的解为

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda x} + C_2 \sin \sqrt{\lambda x} \quad (12)$$

式中: $C_1, C_2$  - 两个任意参数,把式(9b)代入式(12),若式(12)有解,得

$$C_1 = 0 \quad (13)$$

$$\lambda = n^2 \pi^2 / a^2, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

$X(x)$ 的解为

$$X_n(x) = C_{2n} \sin(n\pi/a)x \quad (15)$$

### 2.3 函数 $Y(x)$ 的求解

将式(14)代入式(10a),得

$$Y'' + dY' - (n^2\pi^2/a^2)Y = 0 \quad (16)$$

其特征方程为

$$r^2 + dr - n^2\pi^2/a^2 = 0 \quad (17)$$

$$\text{令 } \delta_n = \sqrt{d^2 + 4n^2\pi^2/a^2} \quad (18)$$

则式(18)的通解为

$$Y_n(y) = D_n e^{-\frac{d+\delta_n}{2}y} + E_n e^{-\frac{d-\delta_n}{2}y} \quad (19)$$

式中: $D_n, E_n$  - 待定常数。

### 2.4 温度场的解析解

将式(15)、式(19)代入式(7)后叠加得

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (A_n e^{-\frac{d+\delta_n}{2}y} + B_n e^{-\frac{d-\delta_n}{2}y}) \cdot \sin \frac{n\pi}{a}x \right] \quad (20)$$

把式(5)代入式(20)中,利用三角函数的正交性,得

$$A_n = -B_n = 0, n = 2l \quad (21)$$

$$A_n = -B_n = \left( \frac{4(U - u_0)}{n\pi} e^{\frac{d}{2}b} \right) / \left( e^{-\frac{\delta_n b}{2}} - e^{\frac{\delta_n b}{2}} \right), n = 2l - 1 \quad (22)$$

式中: $l = 1, 2, 3, \dots$ 。

将式(22)代入式(20)后,再将得到的  $W(x, y)$  代入式(3),则边界不同恒温时 FGM 板的平面稳态温度场的解析解为

$$T(x, y) = u_0 + 4 \frac{U - u_0}{\pi} e^{d(\frac{b-x}{2})} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2l-1} \cdot \text{sh} \frac{\delta_l}{2} y \cdot \sin \frac{(2l-1)\pi}{a} x / \text{sh} \frac{\delta_l}{2} b \right] \quad (23)$$

## 3 算例与分析

### 3.1 正确性检验

分别应用式(23)、式(24)进行计算,然后对比结果。板的几何尺寸  $a = b = 10$  mm,上边界恒温  $U = 100$  K,其余三边界恒温  $u_0 = 0$  K,梯度参数  $d = 0.1/\text{mm}$ ,板的下边界处的热导率  $D = 1 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。在进行有限元计算时,将 FGM 板离散为 800 个单元和 441 个节点,单元边长 0.5 mm。部分计算结果见表 1。

由表 1 可知:两种方法的最大节点温度误差

0.86%,因此,两种计算方法正确可靠。

表 1 两种方法计算结果的对比

Tab. 1 Contrast of the calculation results of two methods

坐标/ (mm, mm)	FEM 解温度 /K	解析解温度 /K	误差 %
(1, 0)	0.00	0.00	0.00
(1, 1)	1.68	1.67	-0.60
(1, 2)	3.36	3.35	-0.30
(1, 3)	5.22	5.20	-0.38
(1, 4)	7.46	7.43	-0.40
(1, 5)	10.33	10.29	-0.39
(1, 6)	14.29	14.21	-0.56
(1, 7)	20.21	20.07	-0.70
(1, 8)	30.34	30.08	-0.86
(1, 9)	51.30	51.27	-0.06
(1, 10)	100.00	100.00	0.00

### 3.2 结果与讨论

统一热边界条件为:上边界恒温  $U = 1300$  K,其余三边界恒温  $u_0 = 300$  K。

#### 3.2.1 梯度参数对温度场的影响

设板的几何尺寸  $a = b = 10$  mm,梯度参数分别为  $d = -0.2/\text{mm}, 0, 0.2/\text{mm}$ ,此时稳态温度场的等温线分布见图 2。

由图 2 可知:

(1) 由于 FGM 板结构在几何形状、热性质以及外加热载等方面关于板中心线  $\bar{x} = x/a = 0.5$  对称,所以,在不同梯度参数作用下,温度场等温线分布也关于板中心线  $\bar{x} = 0.5$  对称(图 2)。

(2) 由于左右两边界的高温作用,对于同一水平截面,FGM 板内温度在轴  $\bar{x} = 0.5$  附近最大。在左右两边界降至常温 300 K 时,板内的温度梯度变化由中部向左右两边界递增。

(3) 随着梯度参数  $d$  的增加,FGM 板内的高温区向左右两边界和下边界逐步扩展。400 K 等温线的最低点位置:当  $d = -0.2/\text{mm}$  时,位于  $\bar{y} = 0.41$  附近,当  $d = 0/\text{mm}$  时(为均质材料),位于  $\bar{y} = 0.25$  附近,当  $d = 0.2/\text{mm}$  时,位于  $\bar{y} = 0.18$  附近。这与 FGM 板的热导率分布有关,当  $d > 0$  时,热导率自上而下递减,当  $d < 0$  时,热导率自上而下递增。

(4) 在无量纲坐标(0.5, 0.25)处:当  $d = 0$  时的温度值为 395.57 K,当  $d = -0.2/\text{mm}$  时的温度值 340.93 K 比当  $d = 0$  时低 13.8%,当  $d = 0.2/\text{mm}$  时的温度值 483.46 K 比当  $d = 0$  时高 22.2%。

3.2.2 几何组成对温度场的影响

10 mm,  $b = 5$  mm。此时的稳态等温线的分布见图

设梯度参数分别为  $d = -0.2/\text{mm}, 0.2/\text{mm}$ 。 3、图4。

板的几何尺寸分别为:  $a = 5$  mm,  $b = 10$  mm 和  $a =$

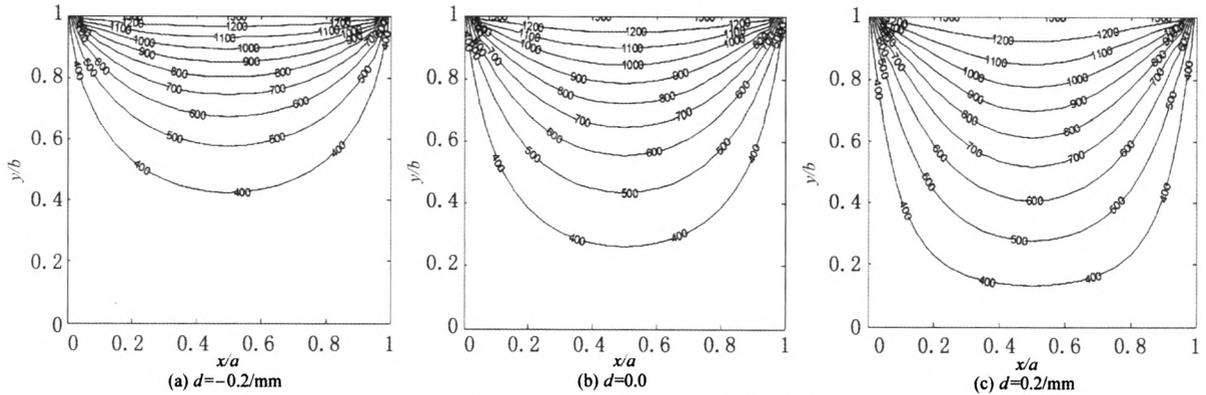


图2 在 $a=b=10$ mm时的等温线分布

Fig.2 Isotherm distributions when  $a=b=10$ mm

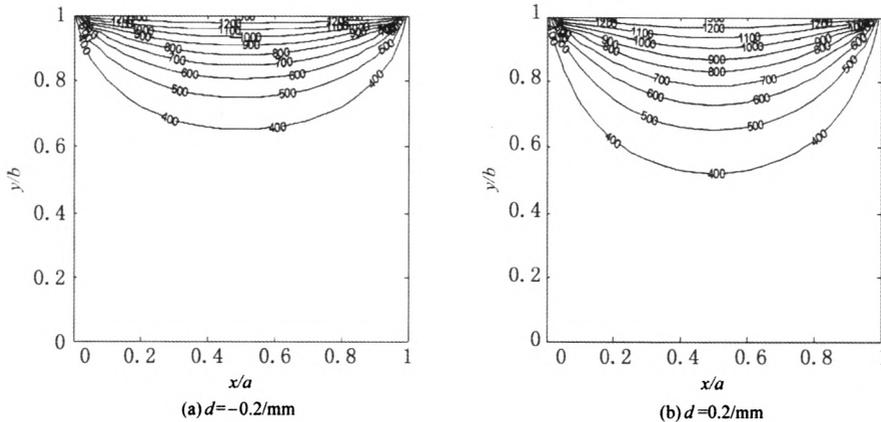


图3 在 $a=5$ mm,  $b=10$ mm时的等温线分布

Fig.3 Isotherm distributions when  $a=5$ mm,  $b=10$ mm

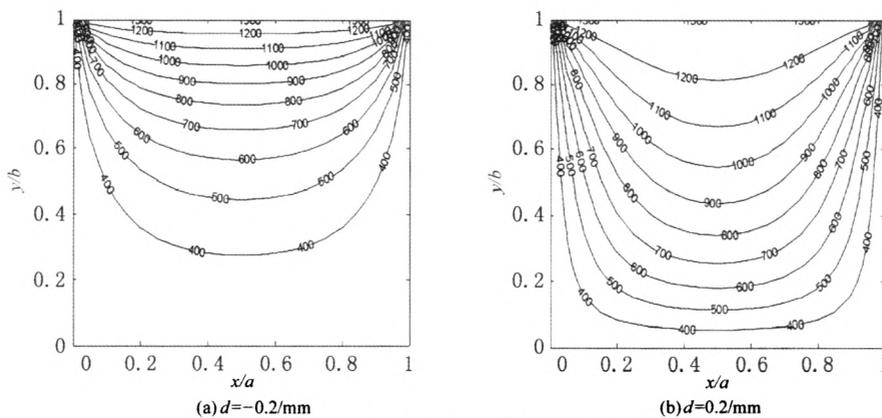


图4 在 $a=10$ mm,  $b=5$ mm时的等温线分布

Fig.4 Isotherm distributions when  $a=10$ mm,  $b=5$ mm

综合分析图2、图3、图4可知,板的几何组成对温度场的影响如下:

(1) 板内稳态温度场的对应等温线的梯度:与  $a = b = 10$  mm 时比较,在板的两侧,在  $a = 5$  mm,  $b = 10$  mm 时明显变小,在  $a = 10$  mm,  $b = 5$  mm 时

明显变大;在板的中下部,在  $a = 5$  mm,  $b = 10$  mm 时明显变大,在  $a = 10$  mm,  $b = 5$  mm 时明显变小。因此,在  $a = 5$  mm,  $b = 10$  mm 时的高温区在板的两侧变化比较缓和,在中部变化较大,在  $a = 10$  mm,  $b = 5$  mm 时的高温区在板的两侧变化比较剧

烈,在中下部变化比较缓和。

(2) 400 K 等温线最低点位置:在  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 5 \text{ mm}$  时,当  $d = -0.2/\text{mm}$  时位于  $\bar{y} = y/b = 0.26$  附近,当  $d = 0.2/\text{mm}$  时位于  $\bar{y} = 0.06$  附近;在  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  时,当  $d = -0.2/\text{mm}$  时位于  $\bar{y} = 0.62$  附近,当  $d = 0.2/\text{mm}$  位于  $\bar{y} = 0.5$  附近;在  $a = b = 10 \text{ mm}$  时,当  $d = -0.2/\text{mm}$  时位于  $\bar{y} = 0.41$  附近,当  $d = 0.2/\text{mm}$  时位于  $\bar{y} = 0.18$  附近。因此,在  $a = b = 10 \text{ mm}$  时的 400K 等温线最低点位置是处在  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 5 \text{ mm}$  和  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  之间。

(3) 板内稳态温度场的对应等温线在  $y$  方向的位置:与  $a = b = 10 \text{ mm}$  时比较,在  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  时明显集中到板的中上部,在  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 5 \text{ mm}$  时明显扩展到板的两侧和下半部。因此,在  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 10 \text{ mm}$  时的高温区主要集中在板的中上部,在  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $b = 5 \text{ mm}$  时的高温区已扩展到板的两侧和下半部。

(4) 对于同一梯度参数  $d$ ,随着 FGM 板高的递减,板内中下部的温度分布趋于平缓,高温区迅速扩展到板的下半部和两侧,且板的两侧的温度梯度较大,将会造成热应力的变化较大。左、右和下边界的恒温作用造成的降温效果不明显。随着 FGM 板宽的递减,板内的温度分布变化加大,高温区迅速收缩到板的中上部,左、右和下边界的恒温作用造成的降温效果明显。

## 4 结论

1) 在假设热导率沿功能梯度板高呈指数函数形式分布的基础上,采用分离变量法,推导出边界不同恒温时 FGM 板的平面稳态温度场的级数解析解,通过与有限元解的对比,检验了研究方法及其结果的正确性。

2) 当上边界恒为 1300 K 与其余三边界恒为 300 K 时,FGM 板的平面稳态等温线分布对称于过形心的  $y$  轴。随着梯度参数  $d$  的增加,FGM 板内的高温区向左右两边界和下边界逐步扩展。板内的温度梯度变化由中部向左右两边界递增。

3) 随着 FGM 板高的递减,板内中下部的温度分布趋于平缓,高温区迅速扩展到板的下半部和两侧,且板的两侧的温度梯度较大;随着 FGM 板宽的递减,板内的温度分布变化加大,高温区迅速收缩到板的中上部。

## 参考文献:

- [1] 韩杰才,徐丽,王保林,等. 梯度功能材料的研究进展及展望[J]. 固体火箭技术, 2004, 27(3): 207-215.
- [2] 仲政,吴林志,陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528-541.
- [3] ZHAO J, AI X, LI Y Z. Transient field temperature field in functionally graded materials with different shapes under convective boundary conditions [J]. Heat Mass Transfer, 2007, 43(12): 1227-1232.
- [4] 陈建桥,丁亮. 功能梯度材料瞬态热传导问题的 M L-PG 方法[J]. 华中科技大学学报, 2007, 35(4): 119-121.
- [5] 张雁,刘霓生,陈林泉,等. 第二类边界条件下梯度功能材料一维温度场的数值模拟[J]. 固体火箭技术, 2004, 27(2): 145-148.
- [6] 许杨健,涂代惠. 对流换热边界下变物性梯度功能材料板瞬态温度场有限元分析[J]. 复合材料学报, 2003, 20(2): 94-99.
- [7] 许杨健,赵志岗. 梯度功能材料板瞬态温度场有限元分析[J]. 功能材料, 1999, 30(1): 103-106.
- [8] 刘五祥. 轴对称功能梯度材料稳态热传导的精确解[J]. 同济大学学报, 2010, 38(5): 716-719.
- [9] 蓝林华,富明慧,高文乐. 功能梯度材料稳态热传导方程的分层精细指数法[J]. 中山大学学报, 2011, 50(4): 1-6.
- [10] JIN Z H. Heat conduction in a functionally graded plate subjected to finite cooling/heating rates: an asymptotic solution [J]. Materials, 2011, 4(12): 2108-2118.
- [11] BABAEI M H, CHEN Z T. Transient hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow cylinder [J]. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 2010, 24(2): 325-330.
- [12] GOLBAHAR HAGHIGHI M R, MALEKZADEH P, RAHIDEH H, et al. Inverse transient heat conduction problems of a multilayered functionally graded cylinder [J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology, 2012, 61(9): 717-733.
- [13] MALEKZADEH P, GOLBAHAR HAGHIGHI M R, HEYDARPOU Y. Heat transfer analysis of functionally graded hollow cylinders subjected to an axisymmetric moving boundary heat flux [J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology, 2012, 61(8): 614-632.
- [14] OHMICHU M, NODA N. Plane thermal stresses in a functionally graded plate subjected to a partial heating [J]. Journal of Thermal Stresses, 2006, 29(12): 614-632.

(责任编辑 马立)