文章编号:1673-9469(2013)02-0110-03　doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2013.02.028

不确定变量存在定理的一个简单证明方法

焦建利
(上海健康职业技术学院,上海 200237)

摘要:不确定变量是不确定理论的三个基本概念之一,用于表示现实生活中的不确定现象。本文利用线性不确定分布,采用构造性的方法证明了不确定变量的存在性。

关键词:不确定理论;不确定分布;不确定变量
中图分类号:O236　**文献标识码**:A

A simple proof method for existence theorem on uncertain variable

JIAO Jian-li
(Shanghai Health Vocational & Technical College Shanghai 200237, China)

Abstract: Uncertain variable is used to represent imprecise quantities and is one of three fundamental concepts in uncertainty theory. By using the linear uncertainty distribution and a structural method, this paper proves an existence theorem on uncertain variable. This theorem shows there must exist an uncertainty space and uncertain variable for a given uncertainty distribution.

Key words: uncertainty theory; uncertainty distribution; uncertain variable

不确定理论是由 Liu 于 2007 年[1]建立并于 2009 年[2]重新定义的一门基于公理化的数学体系。该理论主要用于刻画生产生活中的“不确定常数”及“边界不清晰”概念。自该理论提出以来,无论是在自身理论体系还是应用方面均得到了长足的发展。在理论方面,提出并详细研究了不确定过程[3],不确定分析,不确定微分方程[4],不确定逻辑[5],不确定推理[6],不确定风险分析[7]。在应用研究方面,Liu[8]提出了不确定规划,并应用到系统可靠性分析,设备选址问题,车辆调度等方面。另外,不确定理论得到了大量学者的关注,比如 Bhattacharyya, et al.[9], Gao [10], Gao, Gao and Ralescu[11], Liu and Xu[12], Peng and Iwamura[13], Liu and Ha[14]。2010 年,Liu[2]首先提出了不确定统计理论,并做了重要的基础性工作。之后 Wang and Peng[15]建立了不确定距估计方法用于估计不确定分布中的未知参数;Wang, Gao and Guo[16]建立了不确定样本方差模型估计不确定分布的未知参数;对于多个专家经验数据, Wang, Gao and Guo[17]及 Gao[18]同时独立提出了不确定 Delphi 法;Wang, Gao and Guo[19]首先建立了不确定假设检验的模型,用于检验两位专家的意见是否一致。

不确定测度,不确定变量,不确定分布是不确定理论中的三个基本且重要的概念。其中,不确定测度用于刻画不确定事件发生的可能性,不确定变量用于表示现实生活中的不精确现象,不确定分布用于刻画不确定变量取值规律。对于不确定测度,Liu[2] and Liu[20]分别给出了构造不确定测度的方法;对于不确定分布,Peng and Iwamura[13]证明了一个函数为不确定分布的充分必要条件,并证明了对于一个不确定分布,由该分布产生一个不确定测度,从而构造出一个不确定空间,该空间上总存在一个不确定变量。本文的目的是明确建立不确定变量存在定理,并给出一个较 Peng 和 Iwamura 更为简洁的证明方法。该证明的关键之处是构造闭区间[0,1]上的一个不确定测度。

1 基础知识

文中将要用到的不确定理论中的某些概念,包括不确定测度,不确定变量及不确定分布。

收稿日期:2012-12-22
基金项目:国家自然科学基金(61073121)
作者简介:焦建利(1979-),男,江苏泰兴人,讲师,从事应用数学研究。

令Γ是一非空集,$\pounds$ 是Γ上的σ代数,$M(\Lambda)$,($\Lambda\in\pounds$)是用来表示事件Λ发生的可信度,不确定测度M是满足规范性,自对偶及次可列可加性的三条公理的集合函数。不确定变量ξ是由不确定空间($\Gamma,\pounds,M$)到实数的可测函数。

对于任意的实数x,函数$\Phi(x)=M\{\xi\le x\}$称为不确定变量ξ的不确定分布。Peng 和 Iwamura[13]证明了函数$\Phi:R\to[0,1]$是不确定分布的充分必要条件是其为一个递增函数,如果反函数$\Phi^{-1}(a)$存在且唯一,则$\Phi(x)$称为正则的,反函数$\Phi^{-1}(a)$称为不确定变量ξ的逆分布。在不确定理论中,Liu[1]已经定义并研究了某些常用的不确定分布,如线性不确定分布,zigzag 不确定分布,正态不确定分布及对数正态不确定分布等,这些分布已被应用的不确定金融,不确定过程,不确定分布及不确定微分方程等方面。

2 线性不确定分布及测度

讨论[0,1]上线性不确定分布并给出[0,1]上的一个不确定测度。

下面的不确定分布称为$[a,b]$上的线性不确定分布

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & 0\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

特别地,在上述分布中令$a=0,b=1$,则得到[0,1]上的不确定分布

$$\Phi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}\qquad(1)$$

Liu[20]证明了如下的集合函数是实数R上的一个不确定测度。

$$M(\Lambda)=\begin{cases}\int_\Lambda g(x)dx, & \int_\Lambda g(x)dx<0.5\\ 1-\int_{\Lambda^c}g(x)dx, & \int_{\Lambda^c}g(x)dx<0.5\\ 0.5, & \text{其它}\end{cases}$$

此处Λ是R上的 Borel 集,$g(x)$是满足$\int_R g(x)dx\ge 1$的非负可积函数。

类似地,可以得到[0,1]上的一个不确定测度

$$M(\Lambda)=\begin{cases}\int_\Lambda g(x)dx, & \int_\Lambda g(x)dx<0.5\\ 1-\int_{\Lambda^c}g(x)dx, & \int_{\Lambda^c}g(x)dx<0.5\\ 0.5, & \text{其它}\end{cases}\qquad(2)$$

此处,Λ是[0,1]上的 Borel 集,$g(x)$是满足$\int_{[0,1]}g(x)dx\ge 1$的非负可积函数。特别地,令$\Lambda=[0,x]$,$g(x)=1$,$x\in[0,1]$。上述不确定测度即为$M\{\Lambda\}=x$,$x\in[0,1]$。

3 不确定变量存在定理

利用2中[0,1]上的线性不确定分布及不确定测度,证明不确定变量存在定理。

定理1:设$\Phi(x):R\to[0,1]$是一个单调不减函数,则存在一个不确定空间($\Gamma,\pounds,M$)及定义在该空间上的不确定变量ξ,使得ξ的不确定分布恰好是$\Phi(x)$。

证明:令$\Gamma=[0,1]$,$\pounds$ 是[0,1]上的 Borel 集,M如前定义。

第一步:定义$\eta(\gamma)\le\gamma,\gamma\in[0,1]$。

显然,$\eta(\gamma)$是不确定空间($\Gamma,\pounds,M$)上的一个不确定变量。对于任意的$0\le x\le 1$,有

$M\{\eta(\gamma)\le x\}=M\{\gamma\le x\}=M\{\gamma\in[0,x]\}=x$

则$\eta(x)$的不确定分布是[0,1]上的线性不确定分布。

第二步:设$\Phi(x)$是任意一个不确定分布,则$\Phi(x)$是一个不减函数,对于任意的$0\le y\le 1$,定义$\Phi(x)$的反函数$\Phi^{-1}(y)=inf\{x:\Phi(x)\ge y\}$。显然,$\Phi^{-1}(y)$是一个 Borel 函数。

第三步:令$\xi(\gamma)=\Phi^{-1}(\eta(\gamma))$,则$\xi(\gamma)$是($\Gamma,\pounds,M$)上一个不确定变量。下面证明不确定变量$\xi(\gamma)$的不确定分布恰好是$\Phi(x)$。由于$\eta(\gamma)$是线性的,故有$M\{\xi(\gamma)\le x\}=M\{\Phi^{-1}(\eta(\gamma))\le\Phi(x)\}=\Phi(x)$,即$\xi(\gamma)$的不确定分布恰好是$\Phi(x)$。

4 结论

从理论上证明了不确定变量确实存在而且非空,从而使得不确定理论中三个基本概念:不确定测度、不确定变量及不确定分布均得到了存在性的证明。在证明中,关键之处是构造[0,1]上的不确定测度并结合该区间上的线性不确定分布。

参考文献:

[1] LIU B. Uncertainty Theory[M]. Berlin: Springer - Verlag, 2007.

[2] LIU B. Uncertainty theory: A Branch of mathematics for modeling human uncertainty[M]. Berlin: Springer - Verlag, 2010.

[3] Liu B. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process[J]. Journal of Uncertain Systems, 2008, 2(1): 3 - 16.

[4] LIU B. Some research problems in uncertainty theory [J]. Journal of Uncertain Systems, 2009, 3(1): 3 - 10.

[5] LI X, LIU B. Hybrid logic and uncertain logic [J]. Journal of Uncertain Systems, 2009, 3(2): 83 - 94.

[6] LIU B. Uncertain set theory and uncertain inference rule with application to uncertain control [J]. Journal of Uncertain Systems 2010, 4(2): 83 - 98.

[7] LIU B. Uncertain risk analysis and uncertain reliability analysis[J]. Journal of Uncertain Systems, 2010, 4(3): 163 - 170.

[8] LIU B. Theory and practice of uncertain programming [M]. Berlin: Springer - Verlag, 2009.

[9] BHATTACHARYYA R. Uncertainty theory based novel multi - objective optimization technique using embedding theorem with application to R and D project porfolio selection [J]. Applied Mathematics, 2010, 1 (1): 189 - 199.

[10] GAO X. Some properties of continuous uncertain measure, International Journal of Uncertainty[J]. Fuzziness and Knowledge - Based Systems, 2009, 17 (3): 419 - 426.

[11] GAO X, GAO Y, RALESCU D. On Liu' s inference rule for uncertain systems [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge - Based Systems, 2010, 18(1): 1 - 11.

[12] LIU W, XU J. Some properties on expected value operator for uncertain variables [J]. Information: An International Interdisciplinary Journal, 2010, 13 (5): 1693 - 1699.

[13] PENG Z, IWAMURA K. A suffiicient and necessary condition of uncertainty distribution[J]. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 2010, 13(3): 277 - 285.

[14] LIU Y, HA M. Expected value of function of uncertain variables [J]. Journal of Uncertainty Systems, 2010, 4 (3): 181 - 186.

[15] WANG X, PENG Z. Method of moments for estimating uncertainty distribution[OL]. http://orsc. edu. cn/online/100408. pdf.

[16] WANG X, GUO H. Uncertain variance of sample and its application [J]. Information: An International Interdisciplinary Journal, 2011, 14(1): 79 - 87.

[17] WANG X, GAO Z, GUO H. Delphi method for estimating uncertainty distributions[J]. Information: An International Interdisciplinary Journal, to be published.

[18] GAO J. Determine uncertainty distribution via Delphi method [J]. Proceeding of the First Conference on Uncertainty Theory, Urumqi, 2010.

[19] WANG X, GAO Z, GUO H. Uncertain hypothesis testing for expert' s empirical data[OL]. Mathematical and Computer Modelling, http://orsc. edu. cn/online/100408. pdf, to be published,

[20] LIU Y. How to generate uncertain measure[M]. Proceedings of Tenth National Youth Conference on Information and Management Sciences, Luoyong China, 2008 (In Chinese).

（责任编辑　刘存英）

（上接第86页）

如果在轮胎等其他因素产生过大的过度转向（不足转向）时，可以选取适当的卷耳形式，通过降低（提高）卷耳位置来获得期望的不足转向度。

参考文献：

[1] 余志生. 汽车理论[M]. 北京：机械工业出版社，2000.

[2] 王望予. 汽车设计[M]. 北京：机械工业出版社，2011.

[3] 侯宇明. 商用车板簧建模及整车性能指标分解与综合关键技术研究[D]. 武汉：华中科技大学，2011.

[4] 胡海军. 双排桩 - 锚杆支护的有限元模拟[J]. 中国煤炭地质，2011，23(11)：44 - 47.

[5] 黄颖，张金霖. 福建省某高速公路匝道桥梁体顶升有限元程序分析[J]. 四川理工学院学报：自然科学版，2012，25(5)：87 - 90.

[6] 李刚. 渐变刚度钢板弹簧后悬架有限元与动力学建模及仿真[D]. 长春：吉林大学，2011.

[7] 韩翔. 基于ADAMS的钢板弹簧动力学建模方法及性能仿真[J]. 机械设计与制造，2009(10)：12 - 15.

（责任编辑　马立）