

## 横向绕流场中圆柱壳中等弯曲变形问题研究

周小利<sup>1</sup>, 范小弄<sup>1</sup>, 张伟<sup>2</sup>, 李丽<sup>1</sup>, 李正<sup>1</sup>

(1. 河北工程大学 土木工程学院 河北 邯郸 056038; 2. 河北联合大学 迁安学院 河北 迁安 064400)

**摘要:**针对弹性圆柱薄壳与横向绕流场的流固耦合问题,采用相容拉格朗日-欧拉法,建立了中等弯曲问题的理论分析方程组,着重求解壳体的法向位移和流体表面压力系数。结果表明:在横向绕流场作用下,壳体横截面由圆形变形为近似椭圆形,同时,壳体变形也对壳体表面流场压力产生了影响。通过算例,讨论有关参数对壳体法向位移和表面流体压力系数的影响。最后,应用 ANSYS 软件对该问题进行了数值模拟,验证了理论解的可信度。

**关键词:**流固耦合;相容拉格朗日-欧拉法;弹性圆柱壳;绕流;弯曲变形;数值模拟  
**中图分类号:** O343.5 **文献标识码:** A

### Study on the medium deflection problem of a cylindrical shell in a transversal cross-flow

ZHOU Xiao-li<sup>1</sup>, FAN Xiao-nong<sup>1</sup>, ZHANG Wei<sup>2</sup>, LI Li<sup>1</sup>, LI Zheng<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China  
2. College of Qianan, Hebei Union University, Hebei Qianan 064400, China)

**Abstract:** For the fluid-solid interaction problem between an elastic thin cylindrical shell and a transversal cross-flow, United Lagrangian-Eulerian method is applied to build the theoretical equations for the medium deflection problem, and the deformation and surface pressure coefficient of the shell are focused on. The results suggest that, under the action of a transversal cross-flow, the round section of the shell is changed into approximate ellipse; besides, the deformation of the shell influences the surface pressure coefficient of the shell. By examples, the effects of parameters concerned on deformation and surface pressure coefficient of the shell are discussed. Finally, numerical simulation for the problem proceeds using ANSYS, and the theoretical solution confidence are consequently verified.

**Key words:** fluid-solid interaction; United Lagrange-Euler method; an elastic cylindrical shell; a cross-flow; deflection; numerical simulation

流固耦合力学是流体力学与固体力学交叉而生成的一门力学分支。由于其交叉性质,在技术上与不同的工程领域,如航空航天、土木、船舶、动力、海洋、石化、机械、核动力、地震地质、生物工程等均有密切关系<sup>[1]</sup>。

近年来,国内外在流固耦合这一领域的研究求解主要运用了数值方法,如差分法、有限元以及边界元法等。文献[2]给出了解决流固耦合问题时,描述介质相互作用的四种方法即相容拉格朗

日-欧拉法、任意拉格朗日-欧拉法、单一拉格朗日法、单一欧拉法,以及四种方法的应用特点。任意拉格朗日-欧拉法综合了拉格朗日和欧拉描述的优点,但使得计算较为复杂,而且也存在迁移的影响<sup>[3-4]</sup>,因此有必要去探讨其它方法如相容拉格朗日-欧拉法的应用问题。

同流固耦合问题的数值计算相比,理论计算发展较为缓慢,现有的理论研究成果也比较少,而系统地研究弹性固体在流场中的变形、内力的报

道就更为少见。文献[5]应用相容拉格朗日-欧拉法对弹性圆柱薄壳在绕流场中小弯曲变形的耦合问题进行理论分析和计算。文献[6]给出了基于相容拉格朗日-欧拉法的流固接触面方程及分类简化准则。文献[7]给出了浅拱形薄壳在流体作用下的变形与内力分析。

基于此,本文主要应用相容拉格朗日-欧拉法理论求解横向绕流场中弹性圆柱薄壳发生中等弯曲变形的非线性流固耦合问题,着重求解壳体的变形与流场变化。

### 1 问题描述

流体以均匀速度从无限远处沿垂直于轴线的方向流过一无限长圆柱壳,壳静止于流体中,见图1。流体为理想无重量不可压缩定常势流,在无穷远处压力、密度和速度分别为  $P_\infty$ 、 $\rho_\infty$ 、 $V_\infty$ ;壳体为弹性等厚度薄壳,厚度为  $h$ ,中面半径为  $R$ ,内部压力为  $p_i$  且在其变形过程中保持不变。假设在流体荷载作用下圆柱壳发生了中等弯曲变形,求解壳体的变形和流场变化。

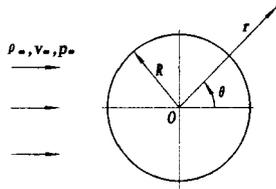


图1 流体绕圆柱横向流动  
Fig.1 Transversal cross-flow of the cylindrical shell

### 2 方程组的建立及求解

速度势  $\varphi$  和流体动压力  $p$  的求解归结到求解方程组

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \\ p &= p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} [V_\infty^2 - (\nabla \varphi)^2] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

和边界条件

$$\varphi = V_\infty r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2)$$

由文献[6]得流固运动学接触条件和动力学接触条件

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial w}{r \partial \theta} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} - w \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (r=R) \quad (3)$$

$$Z_\theta^* = 0; Z_r^* = p_i - p - w \frac{\partial p}{\partial r} \quad (r=R) \quad (4)$$

采用柱坐标系  $(z, \theta, r)$ 。壳体理论的基本关系式为

$$\omega_2 = \omega \theta = \frac{\partial w}{R \partial \theta}, e_{22} = e_{\theta\theta} = \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) / R,$$

$$E_2 = E_\theta = -\omega_2, E_3 = E_r = 1,$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial v}{R \partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right)^2,$$

$$k_{22} = k_{\theta\theta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

引入函数  $U = R/R^*$ , 并考虑到  $X_r^* = Z_r^*$ , 则圆柱壳体中等弯曲平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \partial N_{\theta\theta} / \partial \theta + U Q_\theta &= 2 \\ \partial Q_\theta / \partial \theta + U N_{\theta\theta} + R Z_r^* &= 0 \\ \partial M_{\theta\theta} / \partial \theta + R Q_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

弯矩和曲率变化之间的关系可以给出

$$M_{\theta\theta} = D k_{\theta\theta} = -\frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (6)$$

曲率变化和法向位移之间的关系可以给出

$$w = R/U - R = R(1/U - 1) \quad (7)$$

在方程组(5)中,连续消掉  $Q_\theta, N_{\theta\theta}, M_{\theta\theta}$ , 并利用关系式(4)、(6)和(7),可得

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{1}{R} w \right) \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{R^4}{D} (p_i - p - w \frac{\partial p}{\partial r}) \right] \\ & + \left( 1 + \frac{1}{R} w \right)^2 \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial \theta^5} + \frac{R^4}{D} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} + w \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \\ & + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} = 0 \quad (r=R) \end{aligned} \quad (8)$$

在研究相互作用的静力学问题时,在绝对刚性壳( $w_1 = 0$ )的假设下引入了流体的势  $\varphi_1$  和压力  $p_1$  以及接触面的位移引起的扰动  $\varphi_2$  和  $p_2$ , 则

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, p = p_1 + p_2, w = w_2 \quad (9)$$

把式(9)代入式(1)和(2)中,得出分别对应于  $\varphi_1, p_1$  和  $\varphi_2, p_2, w$  的两组方程。则对于  $\varphi_1, p_1$ , 得到下面的边界问题

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0, p_1 = p_\infty + \frac{\rho_\infty}{2} [V_\infty^2 - (\nabla^2 \varphi_1)^2],$$

$$\partial \varphi_1 / \partial r = 0 \quad (r=R),$$

$$\varphi_1 = V_\infty r \cos \theta \quad (r \rightarrow \infty)$$

对于  $\varphi_2, p_2, w$  有

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0, \varphi_2 = 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (10)$$

$$p_2 = -\frac{\rho_\infty}{2} (\nabla \varphi_2)^2 - \rho_\infty \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{\partial w}{r \partial \theta} \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{r \partial \theta} - w \frac{\partial^2 (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r^2}$$

$$(r=R) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} & (1 = \frac{1}{R}w) \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cdot \\ & \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{R^4}{D} (p_i - p_1 - p_2 - w \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial r}) \right] + \\ & (1 + \frac{1}{R}w)^2 \cdot \\ & \left[ \frac{\partial^5 w}{\partial \theta^5} + \frac{R^4}{D} \left( \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial \theta} + w \frac{\partial^2(p_1 + p_2)}{\partial r \partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial_w \partial(p_1 + p_2)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} = 0 \quad (r = R) \end{aligned} \right\} (13)$$

$\varphi_1$  和  $p_1$  的求解归结为一个边值问题,得<sup>[8]</sup>:

$$\varphi_1 = V_\infty \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad (14)$$

$$p_1 = p_\infty - \frac{p_\infty V_\infty^2}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \left( \frac{R^2}{r^2} - 2 \cos 2\theta \right) \quad (15)$$

而求解  $\varphi_2, p_2, w$  时,因为绕圆柱的流动以线  $\theta = 0, \pi$  对称,势  $\varphi_2$  可展成满足式(10)的  $\theta$  的偶函数级数形式,在这里取两项近似

$$\varphi_2 = A_1 r^{-1} \cos \theta + A_3 r^{-3} \cos 3\theta \quad (16)$$

壳体挠度  $w$  也表示为两项级数形式

$$w = W_2 \cos 2\theta + w_4 \cos 4\theta \quad (17)$$

将式(14)和(16)代入(11)中,得  $p_2$

$$\begin{aligned} p_2 = & -\frac{p_\infty}{2r^8} [A_1^2 r^4 + 9A_3^2 + 2V_\infty r^4 R^2 A_1 + (6r^2 A_1 A_3 \\ & - 2V_\infty r^6 A_1 + 6V_\infty r^2 R^2 A_3) \cos 2\theta - 6V_\infty r^4 A_3 \cos 4\theta] \end{aligned} \quad (18)$$

将式(14)、(16)和(17)代入式(12),令方程两边  $\cos \theta$  和  $\cos 3\theta$  的系数分别相等,得  $A_1, A_3$  与  $W_2, W_4$  之间的关系式

$$\left. \begin{aligned} A_1 = & -W_2 V_\infty R + 2W_2^2 V_\infty \\ A_3 = & \frac{1}{3} (2W_2 - 2W_2^2/R - 3W_4) V_\infty R^3 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将式(15)、(17)~(19)代入式(13),令式左边  $\sin 2\theta$  和  $\sin 4\theta$  的系数项为零,得关于  $W_2, W_4$  的代数方程组

$$\left. \begin{aligned} & (\mu - 16)W_2^3 + 45\mu W_2^2 W_4 - 34\mu R W_2^2 + \\ & R(19\mu - 768 + \gamma)W_2 W_4 + 2R^2(7\mu - 12 + \gamma)W_2 \\ & - 12R^2 \mu W_4 - 4R^3 \mu = 0 \\ & 24\mu W_2^3 - (78\mu + 544)W_2 W_4 + \\ & R(23\mu - 48 - \gamma)W_2^2 - 10R\mu W_2 W_4 - \\ & 22R^2 \mu W_2 + 4R^2(7\mu - 240 + \gamma)W_4 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

方程组(20)中引入了流体弹性参数  $\mu$  和流体静压力差参数  $\gamma$

$$\mu = p_\infty V_\infty^2 R^3 / 2D; \gamma = (p_i - p_\infty) R^3 / D$$

只考虑  $W_4$  的一次项,而  $W_2$  不高于三次,可采用牛顿迭代法解这个二元三次非线性方程组。

### 3 算例分析

设圆柱壳的材料为低碳钢,弹性模量  $E = 200\text{GPa}$ ,泊松比  $\nu = 0.25$ ,厚度  $h = 1 \times 10^{-3}\text{m}$ 。流体密度  $\rho = \rho_\infty = 1\,000\text{kg/m}^3$ ,流场压力  $p_i = p_\infty = 10^5\text{Pa}$ ,流场无穷远处速度  $V_\infty = 0.1\text{m/s}$ 。此时,流体弹性参数  $\mu = 0.0352$ ,流体静压力差参数  $\gamma = 0$ 。求解方程组(20)得  $W_2 = -0.003, W_4 = 0$ 。最大负向法向位移为  $-3\text{mm}$ ,发生在  $A$  点。最大正向法向位移为  $3\text{mm}$ ,发生在  $B$  点。最大法向位移是壳体厚度的3倍,但远远小于中面半径,属于中等弯曲情况。 $A$  点流场压力为  $4.9998\text{Pa}$ ,压力系数为1;  $B$  点流场压力为  $-15.35\text{Pa}$ ,压力系数为  $-3.07$ 。刚性壳在相应参数下的压力系数分别为1和  $-3$ 。

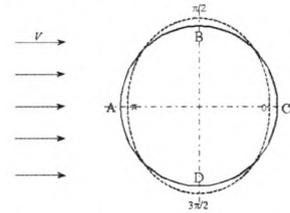
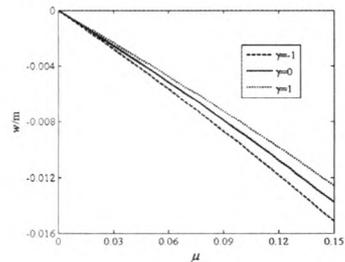


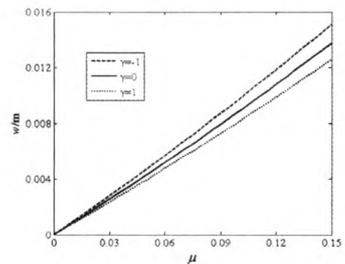
图2 壳体变形示意图

Fig. 2 Deformation of shell

图2为壳体变形示意图,虚线表示变形后中面的截面形状,由原来的圆形变形为近似椭圆形。



(a) A点



(b) B点

图3 A、B点不同  $\gamma$  下的  $w-\mu$  曲线

Fig. 3  $w-\mu$  curve with different  $\gamma$  for point A and B

图3为A、B两点以  $\mu$  为参数的  $w-\mu$  曲线。可知, A点挠度为负而B点挠度为正, A点受流体正

压而  $B$  点受负压。随着  $\mu$  的增大, 两点处  $w$  的绝对值都增大。  $A$ 、 $B$  两点的挠度可达到厚度同量级。随着  $\gamma$  取值的增大,  $w$  随  $\mu$  的变化规律不变但变化减缓。

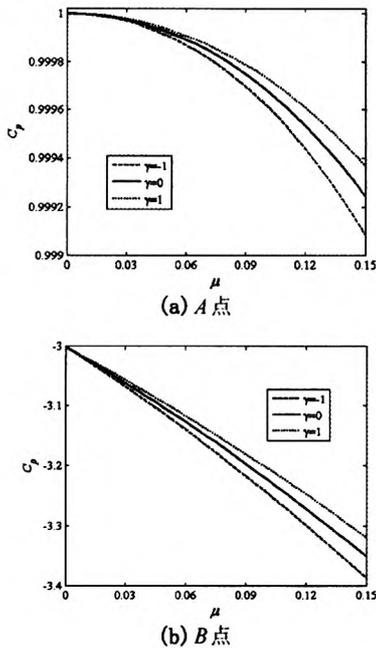


图4 A、B点不同  $\gamma$  下的  $C_p-\mu$  曲线

Fig. 4  $C_p-\mu$  curve with different  $\gamma$  for point A and B

图4为  $A$ 、 $B$  两点以  $\gamma$  为参数的  $C_p-\mu$  曲线。可知, 随着  $\mu$  的增大,  $A$  点的  $C_p-\mu$  由 1 逐渐减小, 即正压逐渐减小, 而  $B$  点的  $C_p$  由  $-3$  逐渐减小, 即负压逐渐增大。两点的  $C_p-\mu$  曲线的形状不同,  $B$  点的  $C_p$  受  $\mu$  的影响比  $A$  点的  $C_p$  所受影响明显很多。随着  $\gamma$  取值的增大,  $C_p$  随  $\mu$  的变化规律不变但变化减缓。

#### 4 流固耦合问题的 ANSYS 数值模拟

利用 ANSYS 软件进行数值模拟。图 5 为得到的壳体法向位移等值图, 可知圆柱壳变形以后截面形状为近似椭圆形, 壳体最大位移值为 2.84 mm, 发生在最左边的节点处, 图 6 为流场压力分布云图, 可知流场正压力最值为 8.83 Pa, 负压力最值为  $-10.88$  Pa。通过比较可知, 有限元模拟和理论分析的结果相近, 存在共性规律。

#### 5 结论

1) 应用相容拉格朗日-欧拉法对流场中壳体弯曲变形非线性流固耦合问题进行建模并解析分析, 得出的壳体法向位移大于壳厚, 属于弯曲中等变形问题。在理想横向绕流场作用下, 壳体横截

面由圆形变形为近似椭圆形, 同时, 壳体变形也对壳体表面流场压力产生了影响。

2) 随着  $\mu$  的增大, 两点处  $w$  的绝对值都增大。随着  $\mu$  的增大,  $A$  点的正压逐渐减小, 而  $B$  点的负压逐渐增大。随着  $\gamma$  取值的增大,  $w$  随  $\mu$ 、 $C_p$  随  $\mu$  的变化规律不变但变化减缓。

3) 数值模拟得到的结果与理论结果相近, 二者结果存在共性规律。

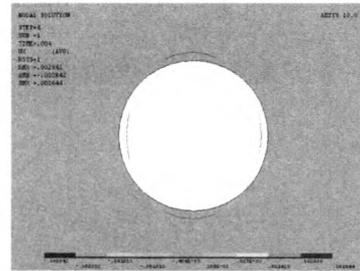


图5 壳体法向位移等值图

Fig. 5 Normal displacement contour of the shell

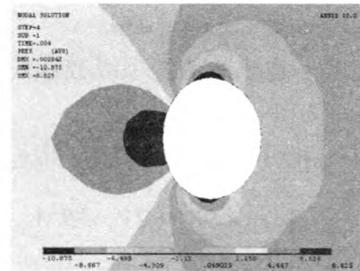


图6 流场压力分布云图

Fig. 6 Fluid pressure contour deflection

#### 参考文献:

- [1] 邢象棠, 周盛, 崔尔杰. 流固耦合力学概述[J]. 力学进展, 1997, 27(1): 19-38.
- [2] 白象忠, 郝亚娟. 非线性流体弹性力学研究进展[J]. 力学进展, 2008, 38(5): 545-560.
- [3] 张雄, 陆明万, 王建军. 任意拉格朗日-欧拉描述法研究进展[J]. 计算力学学报, 1997, 14(1): 91-102.
- [4] 岳宝增, 李笑天. ALE 有限元方法研究及应用[J]. 力学与实践, 2002, 24(2): 7-11.
- [5] 周小利, 白象忠. 弹性圆柱薄壳在流体中的变形与内力分析[J]. 工程力学, 2007, 24(5): 47-52.
- [6] 朱洪来, 白象忠. 流固耦合问题的描述方法及分类简化准则[J]. 工程力学, 2007, 24(10): 92-99.
- [7] 宋晓娟, 白象忠. 浅拱形薄壳在流体作用下的变形与内力分析[J]. 机械强度, 2011, 33(5): 690-695.
- [8] 许维德. 流体力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1979.

(责任编辑 马立)