文章编号:1673-9469(2014)01-0110-03　　doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2014.01.029

UCM 流体的最小二乘有限元解法

周少玲
(河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038)

摘要:提出了求解 UCM 流体的最小二乘有限元方法。将稳态不可压缩蠕动流的 UCM 本构方程,利用速度和应力的近似值进行线性化。建立由所有方程残量的 L^2 范数加权和构造的目标泛函,将微分方程组的求解转化为目标泛函的极小化问题。利用目标泛函对应的欧拉-拉格朗日方程建立迭代格式,最后使用有限元方法求解迭代方程。

关键词:非牛顿流体;UCM 模型;最小二乘有限元法;线性化
中图分类号:O357.1　　**文献标识码**:A

Least - square finite element method for Upper - Convected Maxwell flow

ZHOU Shao - ling
(School of Science, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China)

Abstract: A least - squares finite element method for upper - convected Maxwell flow is proposed. The constitutive equation of a steady - state incompressible creeping model is linearized by using the approximations of velocity and stress. Least - squares functional involve the L^2 - norm of the residuals of each equation multiplied by a proper weight. The problem is transformed into minimize this functional. Euler - Lagrange equation corresponding to the least - squares functional is used to obtain the iterative equation. Finally this equation is solved by finite element method.

Key words: Non - Newtonian fluid; Upper - Convected Maxwell model; least - square finite element method; linearlization

非牛顿流体力学是一门新兴的学科,它起源于高聚物加工的需要,涉及广泛的工业领域,是力学、现代数学、化学和各工程科学的交叉与综合,特别是与材料科学有着十分密切的联系[1-3]。它是现代流体力学的重要分支,也是现代流变学的重要组成部分。近几十年来,由于人们认识到一些复杂的流体(例如聚合物溶液、血液、油漆等等)不能用 Navier - Stokes 方程来描述,因此对非牛顿流体模型方程的研究越来越受到学者们的重视[4]。非牛顿流体的运动方程要比 Navier - Stokes 方程阶数更高,并且具有更强的非线性性质。UCM 模型[5]能够很好地描述某些二阶流体(例如具有高 Deborah 数的弹性流体)的流变特征,本文主要讨论该模型的数值解法。

1 预备知识

设 $H^s(\Omega)(s\geq 0)$ 为 Soblev 空间,其内积和范数分别为$(.,.)$和 $\|\cdot\|_s$。当 $s=0$ 时,$H^s(\Omega)$空间即为 $L^2(\Omega)$空间,相应的范数、内积分别为$(.,.)$和 $\|\cdot\|$。引入下面两个函数空间

$$H_0^s(\Omega)=\{\tau\mid\tau\epsilon H^s(\Omega),\tau\mid_\Gamma=0\}$$

$$L_0^2(\Omega)=\{p\mid p\epsilon L^2(\Omega),\int_\Omega p\mathrm{d}x=0\}$$

空间 $H_0^s(\Omega)$的对偶空间为 $H^{-s}(\Omega)$,其范数为:

$$\|\sigma\|_{-s}=\mathop{\mathrm{SUP}}_{0\neq v\epsilon H_0^s(\Omega)}\frac{<\sigma,v>}{\|v\|_s}\tag{1}$$

定义乘积空间 $H_0^s(\Omega)^d=\prod_{i=1}^{d}H_0^s(\Omega)$, $H^{-s}(\Omega)^d=\prod_{i=1}^{d}H^{-s}(\Omega)$。

收稿日期:2013-10-29
基金项目:河北省自然科学基金资助项目(G2013402063)　　特约专稿
作者简介:周少玲(1979-),女,河北邯郸人,硕士,讲师,从事偏微分方程数值解方面的研究。

2 本构方程线性化

考虑稳定的不可压缩 UCM 蠕动流体

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 & x\in\Omega \\ \nabla p - \nabla \cdot \tau = 0 & x\in\Omega \\ \tau + \lambda((u\cdot\nabla)\tau - g(\nabla u,\tau)) = 2\eta D(u) & x\in\Omega \\ u = 0 & x\in\Gamma \end{cases} \tag{2}$$

其中 Ω 是 R^2 内的有界区域；Γ 为其边界；u 和 p 分别是流体的速度和压强，且假设 p 满足零平均约束，即 $\int_\Omega p dx = 0$；τ 为应力张量；λ 与 η 都是正的常数，分别表示流体的弛豫时间和粘度；$D(u)$ 为应变张量，即 $D(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$。这里，$g(\nabla u,\tau) = \nabla u^T\cdot\tau + \tau\cdot\nabla u$。

首先引入下面的函数空间

$V = \{v \mid v\in H^1(\Omega)^d, v|_\Gamma = 0\}$

$Q = \{q \mid q\in L^2(\Omega), \int_\Omega p dx = 0\}$

$T_s = \{\tau \mid \tau\in L^2(\Omega)^{d\times d}, \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$

$T = \{\tau \mid \tau\in T_s, \|u_1\cdot\nabla\tau\| < \infty\}$

这里 $u_1\in H_0^1(\Omega)^d (d=2)$ 是速度 u 的近似值，$L^2(\Omega)^{d\times d}$ 是由 $d\times d$ 维矩阵函数构成的空间，且矩阵中每个元素都是平方可积的，记 $\Phi = V\times Q\times T$。

由于 UCM 流体的本构方程(即(2)中的第3个方程)是非线性的，所以其数值求解比较困难，考虑将本构方程进行线性化处理。设 τ_1 为 τ 的近似值，且 u_1 和 τ_1 满足

$$\nabla\cdot u_1 = 0 \tag{3}$$

$$\max\{\|u_1\|_\infty, \|\nabla u_1\|_\infty, \|\tau_1\|_\infty, \|\nabla\tau_1\|_\infty\} \le M < \infty \tag{4}$$

对本构方程中的非线性项进行线性化近似

$$u\cdot\nabla\tau \approx u_1\cdot\nabla\tau + u\cdot\nabla\tau_1 - u_1\cdot\nabla\tau_1 \tag{5}$$

$$g(\nabla u,\tau) \approx g(\nabla u_1,\tau) + g(\nabla u,\tau_1) - g(\nabla u,\tau_1) \tag{6}$$

非线性问题(2)转化为

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = 0 & x\in\Omega \\ \nabla p - \nabla \cdot \tau = 0 & x\in\Omega \\ \tau + \lambda(u_1\cdot\nabla\tau) + B(u,\tau) - 2\eta D(u) = F & x\in\Omega \\ u = 0 & x\in\Gamma \end{cases} \tag{7}$$

其中 $B(u,\tau) = \lambda(u\cdot\nabla\tau_1 - g(\nabla u_1,\tau) - g(\nabla u,\tau_1))$，$F = \lambda(u_1\cdot\nabla\tau_1 - g(\nabla u_1,\tau_1))$。定义如下的最小二乘泛函

$$J(u,p,\tau;F) = \|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1}^2 + \|\nabla\cdot u\|^2 + \|\tau + \lambda(u_1\cdot\nabla\tau) + B(u,\tau) - 2\eta D(u) - F\|^2 \tag{8}$$

对于 (u,p,τ)，给出下面的范数

$$|||(u,p,\tau)||| = (\|u\|_1^2 + \|p\|^2 + \|\tau\|^2 + \|u_1\cdot\nabla\tau\|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

定理1 假设 $(u,p,\tau)\in\Phi$，则存在正的常数 c 和 C，使得对于足够小的 M 和 λ 有

$$c\,|||(u,p,\tau)||| \le J(u,p,\tau;0) \le C\,|||(u,p,\tau)||| \tag{10}$$

证明：显然，右面的不等式可以由范数的三角不等式和(4)式推导出来，下面只需证明左边的不等式。记

$H = \|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1}^2 + \|\nabla\cdot u\|^2 + \|\tau + \lambda(u_1\cdot\nabla\tau) + B(u,\tau) - 2\eta D(u)\|^2$

任取 $\varphi\in H_0^1(\Omega)^d$，由格林公式和柯西－施瓦兹不等式得

$\langle\nabla p,\varphi\rangle = \langle\nabla p - \nabla\cdot\tau,\varphi\rangle + \langle\nabla\cdot\tau,\varphi\rangle = \langle\nabla p - \nabla\cdot\tau,\varphi\rangle - \langle\tau,\nabla\varphi\rangle \le C(\|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1} + \|\tau\|)\|\varphi\|_1$

设 $\varphi\ne 0$，则

$$\frac{\langle\nabla p,\varphi\rangle}{\|\varphi\|_1} \le C(\|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1} + \|\tau\|)$$

由 $H^{-1}(\Omega)$ 空间范数的定义，得

$$\|\nabla p\|_{-1} \le C(\|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1} + \|\tau\|) \tag{11}$$

根据文献[6]中的引理2.1，有 $\|p\|_0 \le C\|\nabla p\|_{-1}$ 成立，得到下面的不等式

$$\|p\|_0 \le C(\|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1} + \|\tau\|) \le C(H^{\frac{1}{2}} + \|\tau\| + \|D(u)\|) \tag{12}$$

利用文献[7]中的定理2.1，可得

$$\|u\|_1 \le C_1\|\nabla u\| \le C_2\|D(u)\| \tag{13}$$

$$\|u\cdot\nabla\tau\| \le C(H)^{\frac{1}{2}} + \|\tau\| + \|D(u)\|) \tag{14}$$

$$\|D(u)\|^2 + \|\tau\|^2 \le CH \tag{15}$$

根据(12－15)式，推导出 $|||(u,p,\tau)|||^2 \le CH$。利用不等式 $\|a+b\|^2 \ge \frac{1}{2}\|a\|^2 - \|b\|^2$，得

$J(u,p,\tau;0) \ge \|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1}^2 + \|\nabla\cdot u\|^2 + \frac{1}{2}\|\tau + \lambda(u_1\cdot\nabla\tau) - 2\eta D(u)\|^2 - \|B(u,\tau)\|^2$

$\ge \frac{1}{2}(\|\nabla p - \nabla\cdot\tau\|_{-1}^2 + \|\nabla\cdot u\|^2 + \|\tau + \lambda(u_1\cdot\nabla\tau) - 2\eta D(u)\|^2) - \|B(u,\tau)\|^2 = \frac{1}{2}H - \|B(u,\tau)\|^2$

又因为

$\| B(u,\tau)^2 = \lambda \| u \cdot \nabla \tau_1 - g(\nabla u_1, \tau) - g(\nabla u, \tau_1) \|^2 \le \lambda(\| u \cdot \nabla \tau_1 \|^2 + \| g(\nabla u_1, \tau) \|^2 + \| g(\nabla u, \tau_1 \|^2) \le CM^2 \lambda(\| u \|^2 + \| \tau \|^2 + \| \nabla u \|^2) \le CM^2 \lambda(\| u \|_1^2 + \| \tau \|^2)$

得到

$$J(u,p,\tau;0) \ge \frac{1}{2} H - C\lambda M^2(\| u \|_1^2 + \| \tau \|)$$

$\ge C(\|| (u,p,\tau) \|| - \lambda M^2(\| u \|_1^2 + \| \tau \|)) \ge C \|| (u,p,\tau) \||$ 　证毕

3 有限元求解

设 Ω 为多边形区域，其边界 Γ 是 *Lipschitz* 连续的，对 Ω 进行有限元剖分，并记为 Γ_h。单元 K 的直径为 h_k，且 $h = \max\limits_{k \in \varphi h} \{ h_k \}$，令 $\Phi^h = V^h \times Q^h \times T^h$ 为 Φ 的有限元子空间[8]。

上面的定理证明了泛函 $J(u,p,\tau;0)$ 的椭圆性，但是因为其中包含了范数 $\| \cdot \|_{-1}$，所以并不实用。考虑将范数 $\| \cdot \|_{-1}$ 用 $\| \cdot \|$ 代替，但对于各项需要乘以适当的权。建立如下新的泛函

$$J_h(u,p,\tau;F) = \| \nabla p - \nabla \cdot \tau \|^2 + h^{-2} \| \nabla \cdot u \|^2 + h^{-2} \| \tau + \lambda(u_1 \cdot \nabla \tau) + B(u,\tau) - 2\eta D(u) - F \|^2 \tag{16}$$

问题的求解就转化为最小二乘问题：求 $(u,p,\tau) \epsilon \Phi^h$，使得

$$J_h(u,p,\tau;F) = \min_{(v,q,\sigma) \epsilon \Phi^h} J_h(v,q,\sigma;F) \tag{17}$$

将式(16)记为

$$J_h(v,q,\sigma;F) = \| L_1(\sigma,q) \|^2 + h^{-2} \| L_2(v) \|^2 + h^{-2} \| L_3(\sigma,v) - F \|^2 \tag{18}$$

其中 $(v,q,\sigma) = (\tilde{v},\tilde{q},\tilde{\sigma}) + (v_0,q_0,\sigma_0)$，这里 (v_0,q_0,σ_0) 是初值，$(\tilde{v},\tilde{q},\tilde{\sigma})$ 是校正值。设第 n 次迭代结果是 $(u_n,p_n,\tau_n) \epsilon \Phi^h$，利用(18)式对应的欧拉-拉格朗日方程建立迭代格式

$$\int_\Omega [L_1^T(\sigma,q) L_1(\tilde{\tau},\tilde{p}) + h^{-2} L_2^T(v) L_2(\tilde{u}) + h^{-2} L_3^T(\sigma,v) L_3(\tilde{\tau},\tilde{u}) dx] = -\int_\Omega [L_1^T(\sigma,q) L_1(\tau_n,p_n) + h^{-2} L_2^T(v) L_2(u_n) + h^{-2} L_3^T(\sigma,v) L_3(\tau_n,u_n)] dx$$

第 $n+1$ 次迭代结果即为 $(u_{n+1},p_{n+1},\tau_{n+1}) = (u_n + \tilde{u}, p_n + \tilde{p}, \tau_n + \tilde{\tau})$。

4 结语

UCM 流体模型能够较好地描述一类非牛顿流体，但是由于其非线性的特点，其数值求解往往比较困难。本文在算子水平将非线性项线性化，并使用最小二乘有限元方法和迭代方法求解，算法的实用性较强。

参考文献：

[1] HOU L, NASSEHI V. Evaluation of stress affects flow in rubber mixing[J]. Nonlinear Analysis, 2001, 47(3): 1809 - 1820.

[2] HOU L, CAI L. Nonlinear property of the visco - elastic - plastic material in the impact problem[J]. Journal of Shanghai University: English Edition, 2009, 13(1): 23 - 28.

[3] 李本军，来永伟. Q - S 曲线判定及问题探讨[J]. 中国煤炭地质，2012，24(9)：41 - 43.

[4] ABBAS Z, SAJID M, HAYAT T. MHD boundary - layer flow of an upper - convected Maxwell fluid in a porous channel[J]. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2006(20): 229 - 238.

[5] 林 群，严宁宁. 关于 Maxwell 方程混合元方法的超收敛[J]. 工程数学学报，1996，13(12)：1 - 10.

[6] CAI Z, MANTEUFEEL T A, MCCORMIC S F. First - order system least - squares for velocity - vorticity - pressure form of the Stokes equations, with application to linear elastically[J]. Electronic Transactions on Numerical Analysis, 1995(3):150 - 159.

[7] CAI Z, WESTPHAL C R. An adaptive mixed least - squares finite element method for viscoelastic fluids of Oldroyd type[J]. Journal of Non - Newtonian fluid mechanics,2009(159): 72 - 80.

[8] 杨 春. 基于最小二乘支持向量机岩土本构模型的有限元分析[J]. 河北工程大学学报：自然科学版，2013，30(3)：26 - 29.

（责任编辑 王利君）