

考虑畸变时薄壁箱梁自振频率的计算

胡启平 张默雷

(河北工程大学 土木工程学院, 河北 邯郸 056038)

摘要: 针对箱梁桥因较大的畸变作用而在某些横截面产生明显变形,进而严重影响桥梁正常使用的情况,在广义坐标法的基本假定下,基于哈密顿对偶求解体系和精细积分法,建立考虑畸变时薄壁箱梁自振分析的哈密顿正则方程,并以 MATLAB 编制相应程序,采用二分法求得结构的自振频率。最后通过具体算例进行对比分析,证明该方法的正确性与可行性。

关键词: 薄壁箱梁; 自振频率; 畸变; 广义坐标法; 哈密顿理论; 精细积分法

中图分类号: TU338

文献标识码: A

The natural frequency calculation of thin - walled box girder when distortion was considered

HU Qi - ping , ZHANG Mo - lei

(College of Civil Engineering , Hebei University of Engineering , Hebei Handan 056038 , China)

Abstract: The obvious deformation of the box girder being due to some cross - section distortion effect , affects seriously the normal use of the bridge. Based on the Hamiltonian dual calculating system and the precise integration method , the Hamilton canonical equation about free vibration analysis of thin - walled box girder considering distortion was established by suing the basic assumption of the generalized coordinate method , and the corresponding programs were compiled by MATLAB. The dichotomy was used to calculate natural frequencies of structures. Finally , the comparative analysis of specific examples proved the correctness and feasibility of this approach.

Key words: thin - walled box beam; natural frequency of vibration; distortion; generalized coordinate method; Hamiltonian theory; precise integration method

目前,已有各种解析和数值的方法被应用于箱梁结构动力特性分析。高淑英等^[1]采用折板理论对箱梁的固有振动进行了探讨,得到了箱梁自由振动的运动方程及可确定箱梁固有频率的特征方程,虽然变量少,计算简便,但只限于解决两端简支的箱梁。张永健等^[2]通过假定纵向最大位移差函数的分布,利用能量变分原理对简支箱梁的自由振动进行了分析,导出了考虑剪力滞效应的简支箱梁自振基频的解析解。但其未考虑箱梁的剪切变形,且只能计算箱梁自振的基频。甘亚南等^[3]在同时考虑剪力滞、剪切变形及转动惯量基础上获得了几种常用边界条件的箱梁自振频率计算方程。根据 Hamilton 变分原理,清华大学的梁

立壹等^[4]通过采用分段转换 B3 样条插值函数模拟横截面的翘曲位移提出了一种薄壁杆件自由振动分析的有限杆元法,不但考虑了箱形梁横截面畸变模态,同时放弃了薄壁梁经典理论中的剪力流假定,考虑了杆壁中面上的剪切变形,可有效反映剪力滞后效应。

本文在广义坐标法^[5-7]的基本假定下,结合精细积分法^[8]与哈密顿对偶求解体系^[9-11],首先建立了考虑畸变时结构自由振动的运动方程,并对时间运用频域化的方法,使问题的求解从拉格朗日力学导入哈密顿对偶体系,最后由二分法,通过编制 MATLAB 程序以实现求解自振频率。推进了薄壁箱梁自振分析方面的研究,对工程实践具

有切实的参考价值。

1 基本假定

本文以具有双对称轴的矩形薄壁箱梁为研究对象 坐标轴正方向及其横截面形状和尺寸如图 1 所示。

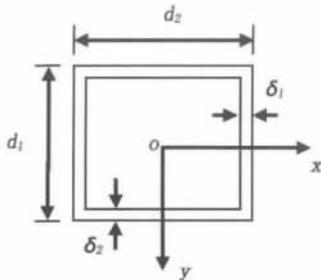


图1 薄壁箱梁截面示意图

Fig.1 Section of the thin-walled

采用广义坐标法的假定: (1) 在小变形情况下 围成闭口薄壁杆件横截面的各板变形前后始终各自保持直线且每一直线段是不可伸缩的。(2) 放弃“刚周边假定”,截面外形轮廓线在自身平面内不再保持不变而产生畸变形(通过角度的改变来表示)如图 2 所示。(3) 在 z 轴方向,即垂直平面方向产生翘曲。

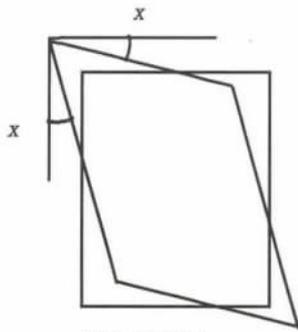


图2 畸变角

Fig.2 Distortion angle

2 哈密顿对偶体系

参照文献 [6] 的推导方法,由最小势能原理 $\delta W = 0$, 可得到整个结构的静力平衡方程:

$$K_{22}\ddot{q} + (K_{21} - K_{12})\dot{q} - K_{11}q + g = 0 \quad (1)$$

其中 $q = [u_0 \ v_0 \ \varphi \ x \ w_0 \ \theta_y \ \theta_x \ \theta]^T$ $g = [q_x \ q_y \ m_z \ 0 \ q_z \ m_y \ m_x \ 0]^T$ $K_{22} = \text{diag}(K_{22}^1, K_{22}^2)_{11 \times 11}$, $K_{11} = \text{diag}(K_{11}^1, K_{11}^2)_{11 \times 11}$, $K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & K_{21}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{11 \times 11}$ $K_{22}^1 = G \iint_A \varphi \varphi^T dA$ $K_{22}^2 = E \iint_A \varphi \varphi^T dA$,

$$K_{11}^1 = \text{diag}(0 \ \rho \ \rho \ C)_{4 \times 4}$$
 $K_{11}^2 = G \iint_A \varphi \varphi^T dA$ $K_{21}^1 = G \iint_A \psi \varphi^T dA$

式中 u_0, v_0 - 截面 z 沿 ox 轴与 oy 轴方向的线位移; φ - 横截面绕 z 轴的扭角; x - 截面沿外形轮廓线的广义变形,即畸变角; w_0 - 整个截面 z 的纵向伸缩位移; θ_y, θ_x - 截面 z 绕 oy 轴与 ox 轴的转角; θ - 截面 z 的广义翘曲函数; m_x, m_y - 沿 ox 轴与 oy 轴的分布弯矩; m_z - 绕 oz 轴分布扭矩; q_x, q_y - 沿 ox 轴和 oy 轴的分布荷载; q_z - 垂直于 z 截面的纵向; E - 弹性模量; G - 剪切模量; $C = \oint [M(s, z)^2/EJ] ds = 96/(d_1/EJ_1 + d_2/EJ_2)$ 。

在结构静力平衡方程式(1)的基础上可得到结构自由振动时的运动方程

$$K_{22}\ddot{\tilde{q}} + (K_{21} - K_{12})\dot{\tilde{q}} - K_{11}\tilde{q} = M \frac{\partial^2 \tilde{q}}{\partial t^2} \quad (2)$$

式中 $\tilde{q} = [\tilde{u} \ \tilde{v} \ \tilde{\varphi} \ \tilde{x} \ \tilde{w}_0 \ \tilde{\theta}_y \ \tilde{\theta}_x \ \tilde{\theta}]^T$, $\tilde{\cdot}$ 代表与时间 t 有关的参数; $M = \rho \cdot \text{diag}(\iint_A \psi \psi^T dA, \iint_A \varphi \varphi^T dA)$; ρ - 结构的密度。

在分析振动问题时,对时间通常应用分离变量法即化频域的方法,通过以下式子进行代换,以达到消去时间 t 的效果:

$$\tilde{u}_0 = u_0(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad \tilde{v}_0 = v_0(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad \tilde{\varphi} = \varphi(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad \tilde{x} = \tilde{x}(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad \tilde{w}_0 = w_0(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad \tilde{\theta}_y = \theta_y(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad \tilde{\theta}_x = \theta_x(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad \tilde{\theta} = \theta(z, \omega) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

式中 ω - 圆频率。

可将式(3)代入式(2)整理得

$$K_{22}\ddot{q} + (K_{21} - K_{12})\dot{q} - K_{11}q + \omega^2 Mq = 0 \quad (4)$$

这样便可得到对应的拉格朗日函数与哈密顿函数

$$L = L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T K_{22} \dot{q} + \dot{q}^T K_{21} q + \frac{1}{2} q^T (K_{11} - \omega^2 M) q \quad (5)$$

$$H = H(q, p) = p^T A q - \frac{1}{2} q^T (B - \omega^2 M) q + \frac{1}{2} p^T D p \quad (6)$$

其中 $A = -K_{22}^{-1} K_{21}$ $B = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$ $D = K_{22}^{-1}$ 相对应的哈密顿型微分方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ B - \omega^2 M & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (7)$$

3 结构自振频率的计算

当计算结构频率及振型时,为了便于求解,计

算中以杆件悬臂处作为坐标原点,沿杆件长度方向为坐标轴的正方向。

$$\begin{aligned} q_L &= Fq_0 + Gp_L \\ p_0 &= -Qq_0 + F^T p_L \end{aligned} \quad (8)$$

其中的 G 、 F 和 Q 表示沿薄壁杆件总长的混和能矩阵,可由式(7)中的 A 、 B 和 D 通过黎卡提微分方程^[12]求得。 p_0 、 q_0 表示杆件起点处的广义力和广义位移, p_L 、 q_L 表示杆件末端的广义力和广义位移。

结合边界条件 $q_L = 0$,对式(8)进行推导可得

$$(Q + F^T G^{-1} F) q_0 = 0 \quad (9)$$

由线性代数的相关知识,若想使 q_0 的解为非零解,则矩阵 $(Q + F^T G^{-1} F)$ 的行列式的值必须等于零,这样即得到了一个关于结构频率 ω 的函数。本文运用了二分法对函数的数值解进行搜索以求得 ω 。之后便可根据自振频率从而求得相应的振型。

4 计算实例

使用本文方法对文献[4]算例1中的薄壁箱梁进行计算。梁长 $L = 20$ m,截面形状如图1所示,具体尺寸为 $d_1 = 1$ m, $d_2 = 2$ m, $\delta_1 = \delta_2 = 0.02$ m,边界条件为悬臂。材料弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa,泊松比为 0.5,密度为 $\rho = 7850$ kg/m²。

表1 计算结果比较

Tab.1 Comparison of results

求解方法	ω_1	ω_2	ω_3
本文解	4.25	5.75	11.25
文献解	3.105	5.176	11.185

表1是采用本文的计算结果与文献中有限杆元法结果的对比。通过表1可知,本文结果与文献计算结果吻合基本良好,由于本文计算模型未考虑剪力滞影响,而薄壁箱梁剪力滞效应会使梁面内自振频率降低,因此本文结果都相对偏大。

5 结语

本文推导了其自振特性分析的哈密顿对偶方

程,有效地计算出薄壁箱梁在考虑畸变效应时的自由振动频率。将所得结果与文献结果进行对比,证明了本文方法的正确性以及可行性。且本文中的计算模型考虑了畸变效应的影响,更加接近了构件的实际变形,结果更加真实。该方法不受边界约束条件的限制,通用性强,计算简便,具有较好的应用性能,对箱梁的抗震及抗风问题有一定的借鉴意义。

参考文献:

- [1]高淑英,陈恩利.折板理论在箱梁动力分析中的应用[J].西南交通大学学报,1994,29(1):1-6.
- [2]张永健,黄平明.考虑剪力滞效应的简支箱梁自振特性[J].建筑科学与工程学报,2005,22(2):40-42.
- [3]甘亚南,周广春.基于能量变分原理的薄壁箱梁自振特性分析[J].中国公路学报,2007,20(1):73-78.
- [4]梁立壹,辛克贵.考虑截面畸变的薄壁箱梁振动分析[D].北京:清华大学,2008.
- [5]包世华,周坚.薄壁杆件结构力学[M].北京:中国建筑工业出版社,2006.
- [6]胡启平,郭晓,刘昱辰.考虑畸变时薄壁箱梁受扭分析的精细积分法[J].江西科学,2012,30(3):335-337.
- [7]盖芳芳,刘先应,刘恂,等.园柱形弹丸高速撞击薄板的碎片云特性数值模拟[J].黑龙江科技学院学报,2013,23(6):600-604.
- [8]钟万勰.应用力学的辛数学方法[M].北京:高等教育出版社,2006.
- [9]钟万勰.应用力学对偶体系[M].北京:科学出版社,2002.
- [10]黄颖,许永吉.预应用混凝土连续梁桥支座更换及梁体复位施工监控研究[J].四川理工学院学报:自然科学版,2013,26(6):68-73.
- [11]胡启平,李张苗,候瑞珀.铁摩辛柯梁弯曲问题的对偶求解体系[J].河北建筑科技学院学报,2006,23(3):1-2.
- [12]钟万勰.矩阵黎卡提(Riccati)微分方程的分析解[J].力学季刊,2000,21(1):1-7.

(责任编辑 刘存英)