

结构的非线性随机地震响应分析

李承根, 何军

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院土木工程系, 上海 200240)

摘要: 提出了一种基于广义高斯分布的结构非线性随机地震响应分析方法, 该方法采用广义高斯分布来预测结构非线性随机地震响应的边缘分布, 采用 Nataf 分布预测结构非线性随机地震响应的联合分布, 而预测模型的参数由非线性响应的一阶和二阶绝对矩来估计。采用发展的方法, 分析了 Kanai - Tajimi 地面运动加速度作用下六层剪切型框架结构的非线性随机响应, 分析结果表明该方法具有较高的数值精度和计算效率。

关键词: 广义高斯分布; 随机响应; 非线性结构; 概率分布; 参数估计

中图分类号: TU311.3

文献标识码: A

Random seismic response analysis of nonlinear structures

LI Cheng - gen , HE Jun

(College of Naval Architecture , Ocean and Civil Engineering , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 , China)

Abstract: Using the generalized Gaussian distribution , this paper proposes an effective method to the analysis of the marginal and joint distributions of random responses of nonlinear structures subjected to random excitations. The marginal probability density function (PDF) of a nonlinear random response is modeled by the generalized Gaussian distribution and the joint PDF of the responses of interest is obtained by the Nataf model. The model parameters required by the method can be estimated by simple estimators. Numerical examples , a six - story shear - building structure under random earthquake loading , show that the method is very effective in the sense that it provides sufficiently exact solutions for the hardening as well as softening random responses with feasible computational efforts.

Key words: generalized Gaussian distribution; random response; nonlinear structure; probability distribution; parameter estimation

结构非线性随机地震响应分析的主要问题是响应的边缘和联合概率密度函数。针对这一问题, 人们发展出了许多分析方法, 如 Fokker - Planck 方程的方法、随机平均法、矩封闭法、路径积分法和随机有限元法^[1-2]。上述方法受非线性类型和结构复杂性的限制, 应用范围有限。目前来说, 只有等效线性化方法和蒙特卡罗模拟法具有广泛的应用性^[3]。但是, 等效线性化方法在分析强非线性结构时有很大误差, 特别是在响应分布的尾部区域, 需要采用局部等效线性化技术^[4]或尾等价线性化方法^[5]来提高精度。蒙特卡罗方法是目前最常用的求解该问题的方法, 但这种方

法收敛速度相对较慢, 为了加速收敛, 需要联合使用拉丁超立方 (Latin Hypercube) 抽样^[6]或准蒙特卡罗 (quasi - Monte Carlo) 方法^[7]。

实际上, 为了提高分析效率, 人们可以预先设定结构非线性随机响应的边缘和联合分布的预测模型, 然后估计模型的参数。而其中的关键问题是确定边缘概率密度函数, 然后再利用 Nataf 模型^[8]得到联合概率密度函数。在一般情况下, 结构的非线性随机地震响应都是关于其平均值 (通常为 0) 对称分布的, 并且具有比高斯分布更宽或更窄的尾部。因此, 人们可以用对称但非高斯的分布来预测结构非线性随机地震响应的边缘

分布。

基于上述分析,本文采用广义高斯分布^[9]来预测公式(1)中 X 的边缘概率密度函数,并利用 Nataf 模型来预测 X 的联合概率密度函数。一个六层框架结构的随机地震响应分析说明了本文所建立方法的有效性和精确性。

1 广义高斯分布简介

如上所述,结构非线性随机地震响应分析的主要问题是求由下面微分方程控制的响应 $X(t)$ 的边缘和联合概率密度函数:

$$m\dot{X} + c\ddot{X} + f_s = -mI_x \ddot{U}_g(t) \quad (1)$$

式中 m 是质量矩阵; c 是阻尼矩阵; f_s 是非线性的恢复力向量(一般是 X 和 \dot{X} 的函数); I_x 是荷载分布向量; $\ddot{U}_g(t)$ 是随机地震荷载。

广义高斯分布随机变量 X 的概率密度函数为:

$$f_x(x) = \frac{\beta}{2a\Gamma(\frac{1}{\beta})} e^{-(\frac{|x-\mu|}{a})^\beta} \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (2)$$

其中实数 μ 是位置参数;正实数 a 为尺度参数;正实数 β 为型参数;而 Γ 表示伽马(gamma)函数。型参数 β 与该分布尾部的厚度相关:当 $\beta=1$ 时,公式(2)表示拉普拉斯分布;当 $\beta=2$ 时,公式(2)表示高斯分布;而在 $\beta \rightarrow \infty$ 的极限情况下,公式(2)表示 $(\mu_x - \sqrt{3}\sigma_x, \mu_x + \sqrt{3}\sigma_x)$ 上的均匀分布。因此,公式(2)可以同时描述宽尾($0 < \beta < 2$)和窄尾($\beta > 2$)的分布。公式(2)的这些性质使其可以被用来模拟公式(1)中 X 的边缘概率密度函数。

广义高斯变量 X 的平均值,方差,偏度和峰度系数分别为:

$$\mu_x = \mu \quad (3)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{a^2 \Gamma(\frac{3}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})} \quad (4)$$

$$\gamma_x = 0 \quad (5)$$

$$\lambda_x = \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta}) \Gamma(\frac{5}{\beta})}{\Gamma^2(\frac{3}{\beta})} \quad (6)$$

公式(3)、(5)和(6)表明 X 的模型参数与 X 的前四阶矩有关。另一方面,广义高斯分布的型参数 β 也可以由 X 的前两阶绝对矩来表示:令 $\mu = 0, Y = |X|$,则 Y 的概率密度函数由下式给出:

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})} e^{-(\frac{y}{a})^\beta} \quad y \in [0, \infty) \quad (7)$$

因此,通过公式(4)得到 X 的 r 阶绝对矩:

$$E[|X|^r] = E[Y^r] = \frac{1}{a\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})} \int_0^\infty y^r e^{-(\frac{y}{a})^\beta} dy$$

$$= \left[\frac{\sigma_x^2 \Gamma(\frac{1}{\beta})}{\Gamma(\frac{3}{\beta})} \right] \frac{\Gamma(\frac{1+r}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta})} \quad (8)$$

其中 $E[\cdot]$ 表示求期望。在 $r=4$ 的情况下,在两边同时除以 σ_x^4 ,可以得到公式(6)。

令公式(5)中的 $r=1$,可以得到广义高斯函数比(ggfr)的倒数

$$M(\beta) = \frac{(E[|X|])^2}{\sigma_x^2} = \frac{\Gamma^2(\frac{2}{\beta})}{\Gamma(\frac{1}{\beta}) \Gamma(\frac{1}{\beta})} \quad (9)$$

因而,型参数 β 与 x 的前两阶绝对矩 $E[|X|]$ 和 $\sigma_x^2 = (E[|X|])^2$ 建立了一一对应的函数关系。

广义高斯变量 X 的累积分布函数(CDF)为:

$$F_x(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(x - \mu) \zeta \left[\frac{1}{\beta}, \left(\frac{|x - \mu|}{a} \right)^\beta \right] \quad (10)$$

其中的 $\text{sgn}(x)$ 是符号函数,即当 x 为负数、零或正数时, $\text{sgn}(x)$ 分别为 $-1, 0, 1$ 。 ζ 是正则化的不完全伽马函数,即 $\zeta(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt / \Gamma(s)$ 。

由式(10)可以推导出广义高斯分布的累积分布函数的反函数:

$$x = F_x^{-1}(p) = \text{sgn}\left(p - \frac{1}{2}\right) a \left\{ \zeta^{-1} \left[\frac{1}{\beta}, \text{sgn}\left(p - \frac{1}{2}\right) (2p - 1) \right] \right\}^{\frac{1}{\beta}} + \mu \quad (11)$$

式中的 ζ^{-1} 表示正则化的不完全伽马函数的反函数,可表示为 $x = \zeta^{-1}(s, w)$,同时有 $w = \zeta(s, x)$ 。

2 模型参数估计

公式(2)中有3个参数,即位置参数 μ ,尺度参数 a 和型参数 β 。如前所述,一般来说,响应 X 的平均值一般是0,所以由公式(3)可以将位置参数 μ 设为0。此外,公式(4)表明尺度参数 a 与 X 的方差 σ_x^2 和形状参数 β 有关。在方差已知的情况下,参数 a 仅取决于型参数 β 。与此相反的是,公式(6)和(9)中,型参数 β 独立于 μ 和 a 。因此,型参数 β 的估计是模型参数估计中的关键。

有两种常用的方法来估计型参数 β ,即最大似

然法和矩方法^[10]。最大似然法需要繁琐的迭代过程,对样本和初始值非常敏感。矩方法是以峰度系数为基础,即公式(6)或者 ggfr 的倒数函数(公式(9))。由于峰度系数对样本和 ggfr 的倒数函数十分敏感,而 $M(\beta)$ 对于样本则相对不敏感,因此,我们可以采用响应的前两阶绝对矩并利用公式(9)来估计型参数 β 。

通常,公式(1)中 X 的前两阶绝对矩没有解析解,需要采用数值积分方法或抽样方法估计前两阶绝对矩。数值积分方法或抽样方法需要离散激励过程 $\dot{U}_g(t)$ 。通常 $\dot{U}_g(t)$ 的离散表达式包含成百上千个变量,因此,无论是数值积分方法和方差缩减抽样方法都不适合估计 X 的前两阶绝对矩。因此,我们用蒙特卡洛方法来估计前两阶绝对矩。基于蒙特卡洛方法提供的 X 的样本,响应的前两阶绝对矩由下式给出

$$E[|X|^r] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x_n|^r, \quad r=1, 2 \quad (12)$$

其中 N 是响应的样本数; x_i 是第 i 个响应样本。

3 X 的联合概率分布函数

在 X 的边缘分布和协方差已知的条件下,可以通过 Nataf 模型得到 X 的联合概率分布函数

$$f_x(x) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \cdots f_{x_N}(x_N) \frac{\varphi_N(z; R^1)}{\varphi(Z_1) \varphi(Z_2) \cdots \varphi(Z_N)} \quad (13)$$

其中 $Z_i = \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)]$; $\Phi(\cdot)$ 是标准正态变量的累积分布函数; $\varphi(\cdot)$ 是标准正态变量的概率密度函数; $\varphi_N(Z; R)$ 是相关矩阵为 R 的 N 维标准正态概率密度函数; 矩阵 R 中的元素 ρ'_{ij} 与 X_i 和 X_j 的相关系数 ρ_{ij} 的函数关系为:

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_i - \mu x_i}{\sigma_{x_i}} \right) \left(\frac{x_j - \mu x_j}{\sigma_{x_j}} \right) \varphi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij}) dz_i dz_j \quad (14)$$

对于每一个已知的 ρ_{ij} , 通过迭代求解公式(14)可以获得 ρ'_{ij} 。为了避免这种繁琐的计算,通过使用最小二乘拟合,我们给出了求解 ρ_{ij} 的经验公式:

$$\begin{aligned} \rho'_{ij}(\rho_{ij}, \beta_i, \beta_j) = & -0.00029 + 1.06264\rho_{ij} + \\ & 0.00022(\beta_i + \beta_j) - 0.00007(\rho_{ij}^2 + \beta_i^2 + \beta_j^2) - \\ & 0.01473(\rho_{ij}\beta_i + \rho_{ij}\beta_j) - 0.00001\beta_i\beta_j - 0.00676\rho_{ij}^3 \\ & + 0.00001(\beta_i^3 + \beta_j^3) + 0.00001(\rho_{ij}^2\beta_i + \rho_{ij}^2\beta_j) + \\ & 0.00188(\rho_{ij}\beta_i^2 + \rho_{ij}\beta_j^2) \end{aligned} \quad (15)$$

需要注意的是:该经验公式中 ρ_{ij} , β_i 和 β_j 的取值范围分别为 $[-0.95, 0.95]$, $[1, 6]$ 和 $[1, 6]$ 。

4 数值分析实例

考虑如图1所示的六层剪切结构模型。楼面质量和总的层间活荷载如图所示。假设阻尼为瑞利阻尼,前两个振型的阻尼比均为5%。每层的层间恢复力定义为:

$$f_i = k_0 [aX + (1-a)Z] \quad (16)$$

式中 $a=0.1$ 表示一个非线性参数, X 和 Z 分别表示层间位移中弹性和滞变的部分,其中 Z 服从 Bouc - Wen 模型^[11-12]

$$\dot{Z} = -\gamma|\dot{X}|Z|Z|^{n-1} - \beta\dot{X}|Z|^n + A\dot{X} \quad (17)$$

其中的参数值 $n=2$, $A=1$, $\gamma=\beta=A/(2x_y^n)$, 而 $x_y=0.01$ 为屈服位移。

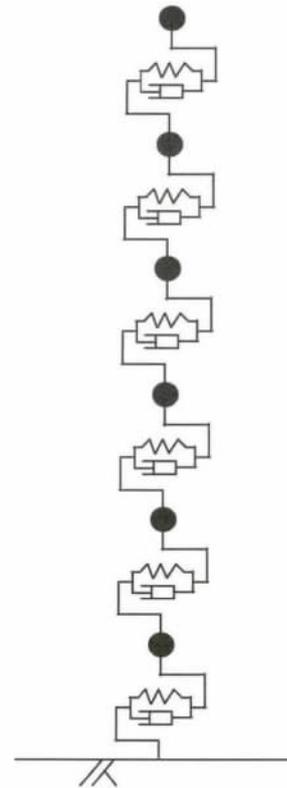


图1 六层剪切型楼的分析模型

Fig.1 A six-story shear-building model

假定公式(1)中的随机地震载荷 $\ddot{U}_g(t)$ 为平稳高斯过程,谱密度为^[13-14]

$$S_{\xi\xi}(\omega) = S_0 \frac{\omega_f^4 + 4\omega_f^2 \zeta_f^2 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + 4\omega_f^2 \zeta_f^2 \omega^2} \quad (18)$$

其中,过滤器参数 $\omega_f=15.7$ (弧度/秒)和 $\zeta_f=0.6$,而相应的白噪声过程的功率谱密度 $S_0=$

0.015 6m²/s³。

在随机地震激励的离散中,截断频率设为 $\omega_L = 0$ (rad/sec) 和 $\omega_U = 150$ (rad/sec),而步长设为 $\Delta\omega = 0.3$ (弧度/秒)。因此,离散表达式有 $N = 2(\omega_U / \Delta\omega) = 1\ 000$ 个随机变量。设第六和第五层的位移为 X_1 和 X_2 ,他们的平均值是零,由 2 000 个样响应样本可计算出的 X_1 和 X_2 的第一和第二阶绝对矩,并计算出 X_1 和 X_2 的型参数 β ,计算结果分别列于表 1 和 2,从其中我们也可以估计尺度参数 a 。

表 1 X_1 统计矩的平均值和广义高斯分布模型的型参数

Tab. 1 Mean values of statistical moments of X_1 and the shape parameter of the generalized Gaussian distribution model

样本数	$\sigma_{x_1}^2$ 的平均值 /mm ²	$E[X_1]$ 的平均值/mm	$M(\beta)$	β
2 000	2 064.610	35.730	0.618	1.770

表 2 X_2 统计矩的平均值和广义高斯分布模型的型参数

Tab. 2 Mean values of statistical moments of X_2 and the shape parameter of the generalized Gaussian distribution model

样本数	$\sigma_{x_2}^2$ 的平均值 /mm ²	$E[X_2]$ 的平均值/mm	$M(\beta)$	β
2 000	969.123	24.678	0.615	1.737

图 2、3 给出了 X_1 和 X_2 的广义高斯分布近似和 Monte Carlo 模拟结果。图 2、3 表明广义高斯分布近似与用 Monte Carlo 结果的吻合良好。对于尾部区域,模拟的结果在广义高斯分布附近振动。由 2 000 个样本得到的 X_1 和 X_2 的相关系数 $\rho_{12} = 0.86$,由经验公式(15)可以得到 $\rho'_{12} = 0.88$ 。由图 2 和图 3 所示的计算结果以及式(13),可以得到 X_1 和 X_2 的联合概率分布函数,用于分析响应 X_1 和 X_2 的联合穿越率和结构的整体可靠度。

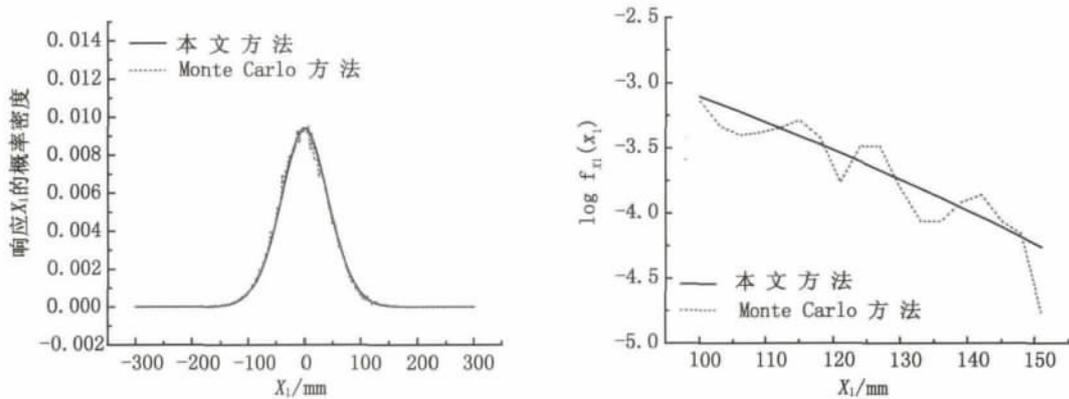


图 2 平稳的第六层楼位移响应的边缘概率密度函数

Fig. 2 Marginal PDFs of the stationary sixth-story displacement response

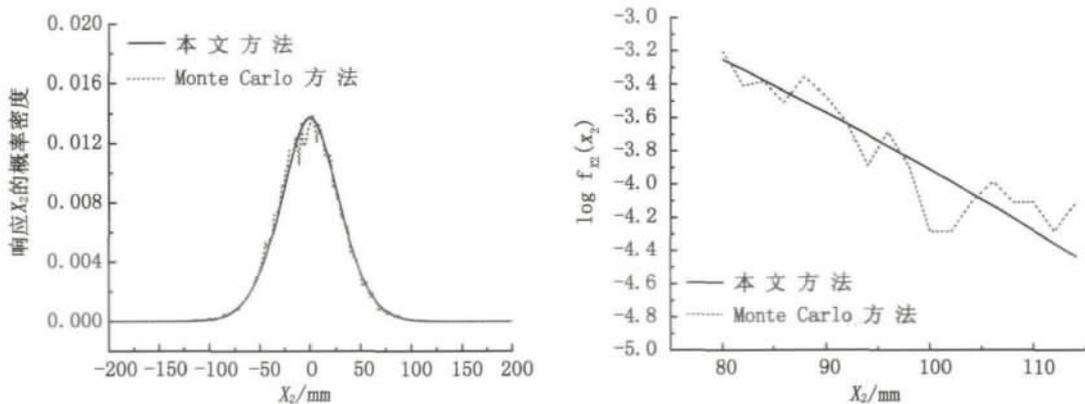


图 3 平稳的第五层楼位移响应的边缘概率密度函数

Fig. 3 Marginal PDFs of the stationary fifth-story displacement response

5 结论

基于广义高斯分布和 Nataf 模型,本文建立了结构非线性随机地震反应边缘和联合分布的分析方法,通过一个六层剪切型结构模型非线性随机地震反应的分析,验证了本文所建立方法的有效性和精确性。

1) 本文所建立的方法能够给出结构非线性随机地震反应边缘分布和联合分布的解析表达式,为结构的地震安全性分析提供了方便。

2) 本文所建立的模型的参数由 Monte Carlo 模拟方法来确定,参数估计简单,适于一切具有确定性解的工程结构,因此应用范围广泛。

3) 本文所建立的方法适用于一切反应具有对称分布特性的结构随机振动问题,因此,对其他随机振动问题,如结构风致随机振动和波浪力作用下的结构随机振动问题,该方法同样适用。

4) 在模型参数的估计中,应尽可能准确地计算出所涉及的反应矩,以保证得到更准确的广义高斯分布模型。

5) 对于反应不是对称分布的情况,可以采用广义对数正态分布来模拟结构非线性随机反应的边缘分布,并结合 Nataf 模型给出反应的联合分布,因此,本文所建立的方法对具有非对称反应的结构非线性随机振动问题的分析,也具有参考价值。

参考文献:

- [1] LUTES L D, SARKANI S. Random vibrations: analysis of structural and mechanical systems [M]. Butterworth - Heinemann, 2004.
- [2] SHINOZUKA M. Monte Carlo solution of structural dynamics [J]. Computers & Structures, 1972, 2(5): 855 - 874.
- [3] PROPPE C, PRADLWARTER H J, SCHU • LLER G I. Equivalent linearization and Monte Carlo simulation in stochastic dynamics [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2003, 18(1): 1 - 15.
- [4] CASCIATI F, FARAVELLI L, HASOFER A M. A new philosophy for stochastic equivalent linearization [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1993, 8(3): 179 - 185.
- [5] FUJIMURA K, DER KIUREGHIAN A. Tail - equivalent linearization method for nonlinear random vibration [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2007, 22(1): 63 - 76.
- [6] LOH W. On Latin hypercube sampling [J]. Annual Statistics, 1996(24): 2058 - 2080.
- [7] NIEDERREITER H., HELLEKALEK P, LARCHER G, et al. Monte Carlo and quasi - Mento Carlo methods [M]. New York: Spring - Verlag, 1998.
- [8] LIU P L, DER KIUREGHIAN A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1986, 22(1): 63 - 76.
- [9] NADARAJAH S. A generalized normal distribution [J]. Journal of applied statistics. 2005, 32(7): 685 - 694.
- [10] YU S, ZHANG A, LI H. A review of estimating the shape parameter of generalized Gaussian distribution [J]. Journal of Computational Information Systems, 2012, 8(21): 9055 - 9064.
- [11] BOUC R. Forced vibration of mechanical systems with hysteresis [C] // Proceedings of the Fourth Conference on Non - linear oscillation, Prague, Czechoslovakia. 1967.
- [12] WEN Y K. Method for random vibration of hysteretic systems [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1976, 102(2): 249 - 263.
- [13] KANAI K. Semi - empirical formula for the seismic characteristics of the ground [J]. Bulletin of Earthquake Research Institute, University of Tokyo, 1975(35): 309 - 325.
- [14] TAJIMI H. A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake [C] // Proceedings of the second world conference on earthquake engineering, Tokyo and Kyoto, Japan, 1960, 781 - 798.

(责任编辑 王利君)