文章编号:1673-9469(2015)01-0111-02 doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2015.01.029

一类带有函数指数的 *Logistic* 方程正解的有界性

冀铁果[1],赵雪婷[1],董卫[2]
(1.河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038;2.河北工程大学 水电学院,邯郸 056038)

摘要: 本文讨论 R^N 空间中一类带有函数指数的 *Logistic* 微分方程正解的有界性。利用 Sliding Method 和比较原理得出结论,为讨论此类方程正解的唯一性打下基础。

关键词: Logistic; Sliding Method; 有界性
中图分类号: O175.29 **文献标识码:** A

The boundness of positive solutions of a Logistic equations with varying power

JI Tie-guo[1], ZHAO Xue-ting[1], DONG Wei[2]
(1. College of Science, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China;
2. College of Water Conservancy and Hydropower, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China;)

Abstract: In this paper, we discuss the boundness of positive solutions of a Logistic partial differential equations on R^N with varying power. We use the sliding method and comparison principles to reach the conclusion which the uniqueness of the positive solution of this kind of equation is based on.

Key words: Logistic; Sliding Method; boundness

我们将讨论方程

$$-\Delta u=\lambda(x)\mu-a(x)\mu^{p(x)},\ x\in R^N \quad (1)$$

正解的有界性,其中 $\lambda(x)$ 和 $a(x)$ 是 R^N 中正的连续函数,且存在正常数 λ_∞ 和 β 使得 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\lambda(x)=\lambda_\infty$,$\lim\limits_{|x|\to\infty}a(x)=\beta$;$p(x)\geq 1$ 是连续函数且存在常数 $p_\infty\in(1,\infty)$,使得 $\lim\limits_{|x|\to\infty}p(x)=p_\infty$。

方程(1)揭示了空间异质性对化学反应影响的模型。对 $p>1$ 是正常数的情形,此类问题被广泛研究,详见参考文献[1-4]。我们综合利用文献[2]中的Sliding Method 以及文献[3]中的比较原理,得到了方程(1)正解的有界性。

结论及证明

定理: 存在正常数 $L>1$,使方程(1)的所有正解 μ,都有 $\mu\leq L$。当 $|x|\to\infty$ 时,所有正解 μ 满足:

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\mu\leq L\cdot\left(\frac{\lambda_\infty}{\beta L^{p_\infty-1}}\right)^{\frac{1}{p_\infty-1}}=\left(\frac{\lambda_\infty}{\beta}\right)^{\frac{1}{p_\infty-1}}$$

本定理的证明分解为引理1和引理2的证明。

引理1: 如果 μ 是方程(1)的正解,则 $\sup_{R^N}\mu<\infty$。

证明: 令 $\tilde{\omega}$ 表示方程 $-\Delta\omega=-\overline{\lambda}\omega-a_*\omega^{\underline{p}}$ 的唯一正解,其中 $\overline{\lambda}=\sup_{R_N}\lambda(x)$,$\underline{p}=\inf_{R^N}p(x)$,$a_*$ 是一个足够小的正数,可使 $a_*<\inf_{R_N}a(x)$ 和 $\tilde{\omega}(0)=\min\limits_{\overline{B_1(0)}}\tilde{\omega}<\max\{1,\sup\limits_{B_1(0)}\mu\}$ 同时成立。

设 $\gamma:[0,1]\to R^N\setminus\{0\}$ 表示一条连续曲线,并且满足 $\gamma(0)=0$,$\gamma(1)=y(y\neq 0)$。

令 $t^*=\sup\{t\in[0,1]\mid\forall s\leq t,x\in\overline{B_1(\gamma(s))},\tilde{\omega}(x-\gamma(s))\geq\mu(x)\}$

则在 $\overline{B_1(\gamma(t^*))}$ 上,$\tilde{\omega}(x-\gamma(t^*))\geq u(x)$ 显然成立。假设 $t^*<1$,则一定存在着单调递减数列 $\{t_n\}$ 使得 $t_n\to t^*$,在 $\overline{B_1(\gamma(t_n))}$ 上存在一数列 $\{x_n\}$,使数列 $\{t_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 满足不等式:$\tilde{\omega}(x_n-\gamma(t_n))<\mu(x_n)$。取数列 $\{x_n\}$ 的一收敛子列(仍用 x_n 表示)使 $x_n\to x^*$,则 $x^*\in\overline{B_1(\gamma(t^*))}$。所以 $\tilde{\omega}(x^*-\gamma(t^*))=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\omega}(x_n-\gamma(t_n))\leq\lim\limits_{n\to\infty}u(x_n)=u(x^*)$

即 $\tilde{\omega}(x^*-\gamma(t^*))=u(x^*)$。但由于在 $\partial B_1(\gamma(t^*))$ 上,$\tilde{\omega}(\cdot-\gamma(t^*))>u(\cdot)$,所以 $x^*\in B_1(\gamma(t^*))$ 并且 x^* 是函数 $\tilde{\omega}(\cdot-\gamma(t^*))-u(\cdot)$

收稿日期:2014-10-09
基金项目:河北省自然科学基金资助项目(A2012402036);国家自然科学基金资助项目(11371117) 特约专稿
作者简介:冀铁果(1976-),女,衡水枣强人,硕士研究生,副教授,从事微分方程方面的研究。

在 $B_1(\gamma(t^*))$ 内的一个极小值。由此可得：

$-\Delta\tilde{\omega}(x^*-\gamma(t^*))\le-\Delta u(x^*)=$
$\lambda(x^*)\mu(x^*)-a(x^*)[\mu(x^*)]^{p(x^*)}=$
$\lambda(x^*)\tilde{\omega}(x^*-\gamma(t^*))-a(x^*)[\tilde{\omega}(x^*-\gamma(t^*))]^{p(x^*)}<\bar{\lambda}\tilde{\omega}(x^*-\gamma(t^*))-$
$a_*[\tilde{\omega}(x^*-\gamma(t^*))]^{p}$

这与 $\tilde{\omega}$ 的定义矛盾。所以 $t^*=1$。所以 $\tilde{\omega}(0)=\tilde{\omega}(y-\gamma(1))\ge\mu(y)$。这表示方程(1)的所有正解 μ 一致有界，即 $\sup_{R^N}\mu<\infty$。

取常数 $L>\max\{1,\sup_{R^n}\mu\}$，使 $b(x)=a(x)L^{p(x)-1}>2\lambda(x)$，则有 $\lim\limits_{|x|\to\infty}b(x)=\beta L^{p-\infty}=:b_\infty$。

令 $v=\dfrac{\mu}{L}$，由方程(1)可得：

$-\Delta v=\lambda(x)v-b(x)v^{p(x)}$，$0<v(x)<1$，$x\in R^N$。

对任意小的正数 $\varepsilon>0$，总可在 $R^N\backslash\bar{B}_R$ 内找到足够大的正数 $R=R_\varepsilon>0$ 使得不等式

$\lambda_\infty-\varepsilon<\lambda(x)<\lambda_\infty+\varepsilon$，$b_\infty-\varepsilon<b(x)<b_\infty+\varepsilon$ 和 $p_\infty-\varepsilon<p(x)<p_\infty+\varepsilon$

同时成立。由于 $\sup_{|x|=R}v<1$，所以可在区间 $(\sup_{|x|=R}v,1)$ 内选一个常数 η，做方程

$$\begin{cases}-\Delta\omega=\lambda(x)\omega-b(x)\omega^{p_\infty+\varepsilon} & R^N\backslash\bar{B}_R\text{ 内}\\ \omega=\eta & \text{在 }\partial B_R\text{ 上}\end{cases}\quad(2)$$

令 w_ε 表示方程(2)的唯一正解。根据文献[3]中的定理1可知，当 $|x|\to\infty$ 时，$\omega_\varepsilon\to\left(\dfrac{\lambda_\infty}{b_\infty}\right)^{1/(p_\infty+\varepsilon-1)}$，即

$$\lim_{|x|\to\infty}\omega_\varepsilon=\left(\frac{\lambda_\infty}{b_\infty}\right)^{1/(p_\infty+\varepsilon-1)}\quad(3)$$

可以取足够小的正数 ε，使不等式 $0<\left(\dfrac{\lambda_\infty+\varepsilon}{b_\infty-\varepsilon}\right)^{1/(p_\infty+\varepsilon-1)}<1$ 成立。

如果存在一个点 $x_0\in R^N\backslash\bar{B}_R$，能使 $\omega_\varepsilon(x_0)=\max_{R^N\backslash B_R}\omega_\varepsilon\ge1$ 成立，则有 $-\Delta\omega_\varepsilon(x_0\ge0)$ 并且 $\lambda(x_0)\omega_\varepsilon(x_0)-b(x_0)\omega_\varepsilon(x_0)^{p_\infty+\varepsilon}<0$。由此可推出：

$\sup\limits_{R_N\backslash\bar{B}_R}\omega_\varepsilon<1$，$\sup\limits_{|x|=R}v<1$，$\inf\limits_{|x|=R}(\omega_\varepsilon-v)>0$。

引理2：对任意的 $|x|>R$，$\omega_\varepsilon\ge v$。

证明：由于 $\inf_{R^N\backslash B_R}\omega_\varepsilon>0$，所以在 $R^N\backslash\bar{B}_R$ 内，一定存在常数 $k>0$ 使得 $k\omega_\varepsilon>v$ 成立。令

$k^*:=\inf\{k\omega_\varepsilon\ge v\ in\ R^N\backslash\bar{B}_R\}$。

假设 $k^*>1$，则函数 $z:=k^*\omega_\varepsilon-v$ 是 C^2 上的非负函数且在 $R^N\backslash\bar{B}_R$ 上满足：

$-\Delta z-\lambda(x)z=-b(x)k^*\omega^{p_\infty+\varepsilon}+b(x)v^{p(x)}\ge$
$-b(x)k^*\omega^{p(x)}+b(x)v^{p(x)}\ge$
$-b(x)[(k^*\omega_\varepsilon)^{p(x)}-v^{p(x)}]+\theta$

其中 $\theta:=\inf b(x)[(k^*)^{p(x)}-k^*]\omega_\varepsilon^{p(x)-}>0$。设

$$g(x):=\begin{cases}\dfrac{(k^*\omega_\varepsilon)^{p(x)}-v^{p(x)}}{k^*\omega_\varepsilon-v} & \text{当 }k^*\omega_\varepsilon\ne v,\\ 0 & \text{当 }K^*\omega_\varepsilon=v\end{cases}$$

则 $g\in L^\infty$。令 $Ж:=-\Delta+g(x)-\lambda(x)$，利用[1]中的引理2.1可得

$\inf z>0$。

但对于任意的 $x\in R^N\backslash\bar{B}_R$，可以找到一个足够小的常数 h，使得 $h\omega_\varepsilon\le z(x)$ 成立，即 $h\omega_\varepsilon\le k^*\omega_\varepsilon-v$ 成立，由此可得 $(h-k^*)\omega_\varepsilon\ge v$ 成立，这与 k^* 的定义矛盾。所以 $k^*\le1$。由于 $k^*\omega_\varepsilon\ge v$ 且 $k^*\le1$，所以 $\omega_\varepsilon\ge v$。

当 $k^*\le1$ 时，由于 $\omega_\varepsilon\ge v$，且 $v=\dfrac{\mu}{L}$，所以 $\mu=Lv\le L\omega_\varepsilon$。由式(3)可得

$$\lim_{|x|\to\infty}\mu\le\lim_{|x|\to\infty}L\left(\frac{\lambda_\infty}{b_\infty}\right)^{1/(p_\infty+\varepsilon-1)}=$$
$$L\cdot\left(\frac{\lambda_\infty}{\beta Lp^{\infty-1}}\right)^{\frac{1}{p_\infty+\varepsilon-1}}$$

所以

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\mu\le L\cdot\left(\frac{\lambda_\infty}{\beta L^{p_\infty-1}}\right)^{\frac{1}{p_\infty-1}}=\left(\frac{\lambda_\infty}{\beta}\right)^{\frac{1}{p_\infty-1}}$$

参考文献：

[1] HENRI BERESTYCKI, FRANCOIS HAMEL, LUCA ROSSI. Liouville－type results for semilinear elliptic e－quations in unbounded domains. Ann. Mat. Pura Appl. (4), 2007(3): 469－507.

[2] WEI DONG. Positive solutions for logistic type quasilinear elliptic equations on RN. [J]. Math. Anal. Appl., 2004(2): 469－480.

[3] YIHONG DU, LI MA. Logistic type equations on RN by a squeezing method involving boundary blow－up solutions [J]. London Math. Soc. 2001, 64(1): 107－124.

[4] YIHONG DU, LI MA. Positive solutions of an elliptic partial differential equation on RN [J]. Math. Anal. Ap－pl., 2002(2): 409－425.

(责任编辑 刘存英)