

文章编号:1673-9469(2015)02-0031-05

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2015.02.008

## 位移边界对2D-FGM板热应力影响研究

许杨健,刘文芝

(河北工程大学 土木工程学院,河北 邯郸 056038)

**摘要:**考虑不同的位移边界条件,建立了常物性2D-FGM板研究模型,并采用有限元法,得到其冷却瞬态热应力场分布图形。位移边界条件对常物性2D-FGM平面区域冷却瞬态热应力分布影响颇大,在简支和一端固定情况下,2D-FGM板自由边界上的热应力 $\sigma_x=0$ ;两端固定情况下,其左右两边界均形成上中下三个应力聚集,应力分布形状和数值都发生了巨大的变化;将四周均设置呈固定约束后,热应力数值增长幅度较两端固定情况时更为明显。此结果为该材料的设计、制备提供了准确的理论计算依据。

**关键词:**功能梯度材料板;冷却;瞬态热应力;位移边界;有限元法

中图分类号:TB34

文献标识码:A

## Study of displacement boundary stress effects on the transient thermal stress of 2D-FGM plate

XU Yang-jian, LIU Wen-zhi

(College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China)

**Abstract:** Considering the different displacement boundary condition, the model of 2D-FGM plate with temperature independency of material properties was established, and the cooling transient thermal stress field distribution pictures were obtained with the finite element method. Effects on the transient thermal stress of 2D-FGM plate with temperature independency of material properties of during cooling process that the displacement boundary condition made were influential enormously. The thermal stress  $\sigma_x$  of on the free boundary of the 2D-FGM plate under simple supported and under one end clamped is zero; The thermal stresses accumulation were formed on the middle and lower of the two left and right boundaries of the 2D-FGM plate under two ends clamped, at the same time the shape and values of the thermal stress changed tremendously; To the 2D-FGM plate under clamped all around, the growth rate of the thermal stresses was more obvious than that of the 2D-FGM plate under two ends clamped. The results of this paper provide the foundations of theory calculation for the design and fabrication of the material.

**Key words:** functionally gradient material (FGM) plate; cooling; Transient thermal stress; the displacement boundary condition; finite element method

功能梯度材料(Functionally Graded Materials, 简称FGM)是一种新型的特殊复合材料<sup>[1-2]</sup>,优于传统复合材料的特性,已成为材料领域研究的重点及多学科交叉领域的研究热点<sup>[3-7]</sup>。因FGM在超高温工作环境中的应用日益广泛,故分析该材料组成物体的热应力场特别是瞬态问题更具实用价值。

国外Obata<sup>[8]</sup>等采用摄动法对加热、冷却过程中的常物性FGM板瞬态热应力进行了研究,但是这种方法过于繁复,不便于工程应用。在前面的研究工作基础上,本文采用有限元法,对处在不同的位移边界条件下的常物性2D-FGM板冷却瞬态热应力问题进行研究分析,其结果对FGM的生产和应用具有重要的指导意义。

收稿日期:2014-12-24

作者简介:许杨健(1956-),男,四川富顺县人,教授,从事固体力学计算、有限元应用和梯度功能材料方面的研究。

### 1 研究模型

如图1所示,选定二维常物性 Al1100/Ti-6Al-4V/ZrO<sub>2</sub> FGM 板作为分析模型,其平面结构长度  $l=40\text{ mm}$ 、厚度  $b=10\text{ mm}$ ,且假设:(1)该 FGM 平面区域具有长度  $x$  与厚度  $y$  方向任意分布及连续变化的材料物性性质;(2)FGM 平面区域的温度初始条件和加热边界条件为:初始温度为常温  $T_0$ ,当时间  $t>0$  时,在区域的四周表面外侧分别施加第一类加热边界温度  $T_a$ 、 $T_b$ 、 $T_c$  及  $T_d$  并保持不变;(3)分析模型前后表面绝热,内部无内热源,且不考虑热固耦合项作用影响。

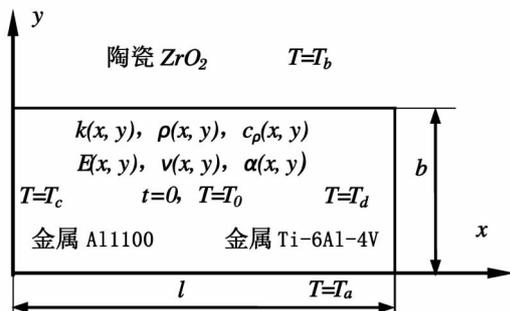


图1 第一类换热边界条件下二维常物性FGM平面区域  
Fig.1 2D-FGM plate during first heat exchange boundary conditions

图中,  $k, \rho, c_p, E, \nu$  以及  $\alpha$  分别是 FGM 的热导率、密度、比热,弹性模量和线热膨胀系数。

#### 1.1 位移边界条件

为研究外部约束对常物性 2D-FGM 板平面区域冷却瞬态热应力分布的影响,本文选取 4 种位移边界条件,即简支、一端固定、两端固定、四周固定,分别如图 2 中 a、b、c、d 所示。

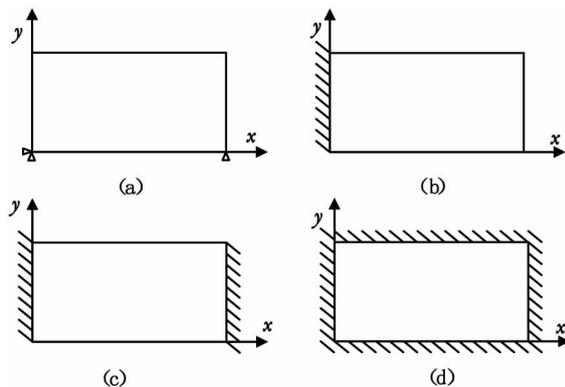


图2 位移边界条件  
Fig.2 Displacement boundary conditions

#### 1.2 平面结构和加热、冷却边界条件

使用网格自动划分程序对上述研究模型平面

区域进行网格划分,在  $x$  方向上划分 80 层,即选定 81 条纵向线段,每一条线段上取 21 个节点,将该平面区域划分为 3 200 个单元,1 701 个节点。瞬态时间步长  $\Delta t$  取 0.1,并给出换热边界条件:

加热时,板的周边第一类换热边界条件为  
 $T_a = 400\text{ K}, T_b = 400\text{ K}, T_c = 400\text{ K}, T_d = 400\text{ K}, T_0 = 300\text{ K}$  (1)

冷却时,板的周边第一类换热边界条件为  
 $T_a = 300\text{ K}, T_b = 300\text{ K}, T_c = 300\text{ K}, T_d = 300\text{ K}, T_0 = 400\text{ K}$  (2)

式(1)、式(2)中的  $T_a, T_b, T_c$  和  $T_d$  是平面矩形区域的四周边界温度,  $T_0$  为初始温度。

### 2 热传导和热应力有限元基本方程

#### 2.1 热传导有限元基本方程

首先将整个平面区域离散成  $M$  个简单的三角形单元,单元面积为  $S^e$  使其 3 个节点编号  $i, j, m$  按逆时针旋转,其中对于边界单元而言,编号  $i$  表示内部节点,编号  $j$  和  $m$  表示边界节点。并且时间过程划分为  $n$  个间隔  $\Delta t_n, n=2, 3, \dots, N$ 。全部节点在瞬时  $t_{n-1}$  的温度值为列矩阵  $\hat{T}_{n-1}$ 。在  $\Delta t_n$  内,常物性 FGM 板瞬态热传导有限元基本方程为<sup>[9]</sup>

$$[H] + [Q] \{T\} = [Q] \{\hat{T}_{n-1}\} \quad (3)$$

式中  $H, Q$ —温度刚度矩阵和变温系数矩阵;  $T$ —未知温度值的列向量。

#### 2.2 热应力有限元基本方程

设图 1 所示常物性 2D-FGM 板的热学性质为位置坐标  $x, y$  的函数,且在每一坐标平面内材料具有各向同性的性质,则该板的应变分量和应力分量分别为<sup>[10]</sup>

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E(x,y)}{1-\nu^2(x,y)} [\varepsilon_x + \nu(x,y)\varepsilon_y] - \frac{E(x,y)a(x,y)\theta(x,y,t)}{1-\nu(x,y)} \\ \sigma_y = \frac{E(x,y)}{1-\nu^2(x,y)} [\varepsilon_y + \nu(x,y)\varepsilon_x] - \frac{E(x,y)a(x,y)\theta(x,y,t)}{1-\nu(x,y)} \\ \tau_{xy} = \frac{E(x,y)}{2[1+\nu(x,y)]} \gamma_{xy} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $E(x, y)$ 、 $a(x, y)$ 、 $\nu(x, y)$ 、 $\theta(x, y, t)$ —弹性模量、线性热膨胀系数、泊松比、温变函数;  $u$  和  $v$ —单元  $e$  内任一点  $(x, y)$  的横向位移和纵向位移。

对于热弹性问题而言,计算应力场得先计算温度场,故此处的网格划分与热传导网格划分完全相同。则常物性 FGM 板瞬态热应力有限元基本方程为<sup>[9]</sup>

$$[K]\{\delta\} = \{L\} + \{Z\} = \{R\} \quad (6)$$

此线性代数方程的解就是整个求解区域在  $t_n$  时刻,所有节点位移  $u_1, u_2, \dots, u_L$  及  $v_1, v_2, \dots, v_L$ 。

### 3 本研究方法的正确性检验

#### 3.1 热传导正确性检验

为了验证本文有限元程序的正确性,我们应用有限元法与分离变量法求解上述特殊非均匀材料平面热传导问题的同一算例。设平面矩形区域宽为  $l = 10 \text{ mm}$ , 厚为  $b = 10 \text{ mm}$ , 参数  $D = E = 1$ ,  $c = d = 0.1$ 。并将该区域划分为 441 个节点, 800 个单元, 整个区域初始温度 300 K, 且区域四周均作用第一类边界条件。利用有限元程序计算该材料平面温度场, 并从中取得  $t = 1.0 \text{ s}, 3.0 \text{ s}, 5.0 \text{ s}$  时的温度场值, 并将其同利用分离变量法计算所得的结果形成对比, 如表 1 所示。

观察表 1 可知:  $t = 1.0 \text{ s}, t = 3.0 \text{ s}, t = 5.0 \text{ s}$  时平面区域水平中线上 11 个点的温度值的分离变量解和有限元解最大误差分别为 0.44%、0.36%、0.25%, 并分别为 (7, 5)、(5, 5)、(9, 5) 的点。由上述分析可知, 利用分离变量法和有限

元法求得两种温度解存在的最大误差都远小于 5%, 是能满足实际工程需求的。

#### 3.2 热应力正确性检验

为检验热应力计算部分有限元程序的正确性, 我们取一简支梁作为算例, 设其模型为  $2l = 100 \text{ mm}, h/2 = 5 \text{ mm}$ , 上边界作用均布荷载  $q$ , 两端作用反力  $ql$  保持平衡, 且不计体力, 温变函数  $\theta = \theta_0(1 - 4y^2/h^2)$  为已知 ( $\theta_0$  为常数), 线热膨胀系数  $\alpha = 0.000001/\text{K}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 弹性模量  $E = 200 \text{ GPa}$ 。利用网格自动划分程序将模型划分为 101 条纵向线段, 21 条横向线段, 每条纵向线段间隔为 1.0 mm, 每条横向线段间隔为 0.5 mm, 即网格划分为 2121 个节点, 同时获得解析解所需要的区域节点坐标。如图 3 所示。

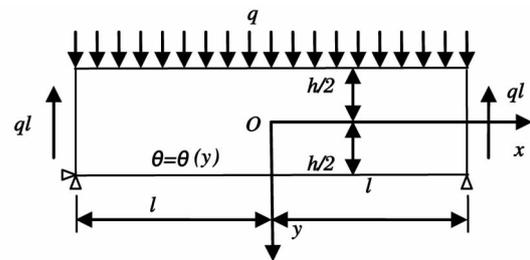


图3 简支梁热应力计算模型

Fig. 3 Model of simple supported beam thermal stress

首先给出简支梁应力分量计算表达式:

$$\sigma_x = E\alpha\theta_0\left(\frac{1}{3} - \frac{4y^2}{h^2}\right) + \frac{2q}{h^3}y\left[3\left(l^2 - \frac{h^2}{10} - x^2\right) + 2y^2\right] \quad (7)$$

表 1 温度场正确性检验

Tab. 1 Testifying temperature distribution accuracy

t=1.0s			t=3.0s			t=5.0s					
坐标	FEM	MAM	误差	坐标	FEM	MAM	误差	坐标	FEM	MAM	误差
(0, 5)	0.00	0.00	0.00	(0, 5)	0.00	0.00	0.00	(0, 5)	0.00	0.00	0.00
(1, 5)	163.25	163.18	0.04	(1, 5)	96.51	96.45	0.06	(1, 5)	64.60	64.61	0.02
(2, 5)	257.85	257.17	0.26	(2, 5)	171.85	171.62	0.13	(2, 5)	117.09	117.09	0.00
(3, 5)	291.83	291.03	0.27	(3, 5)	221.59	221.06	0.24	(3, 5)	154.07	154.01	0.04
(4, 5)	299.05	298.61	0.15	(4, 5)	247.27	246.46	0.33	(4, 5)	173.97	173.87	0.06
(5, 5)	299.81	299.51	0.10	(5, 5)	252.34	251.43	0.36	(5, 5)	176.65	176.57	0.05
(6, 5)	298.72	298.05	0.22	(6, 5)	238.33	237.57	0.32	(6, 5)	162.97	162.96	0.01
(7, 5)	289.26	287.98	0.44	(7, 5)	204.15	203.74	0.20	(7, 5)	134.68	134.78	0.07
(8, 5)	248.83	247.75	0.44	(8, 5)	149.22	149.17	0.03	(8, 5)	94.86	95.02	0.17
(9, 5)	149.00	148.85	0.10	(9, 5)	77.71	77.81	0.13	(9, 5)	48.07	48.19	0.25
(10,5)	0.00	0.00	0.00	(10,5)	0.00	0.00	0.00	(10,5)	0.00	0.00	0.00

$$\sigma_y = -\frac{q}{2}\left(1 + \frac{y}{h}\right)\left(1 - \frac{2y}{h}\right)^2 \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad (9)$$

我们只求简支梁仅在温度荷载作用下的热应力,令  $q = 0, \theta_0 = 300$ 。通过式(7)、式(8)、式(9)计算该问题热应力  $\sigma_x$  的解析解,通过有限元法计算得到其数值解。给出简支梁  $x$  坐标为 0.0 的纵向线( $y$  轴)上热应力的解析解和有限元解,并将两者的计算结果进行对比。如表 2 所示。

表 2 温变下的简支梁平面热应力

Tab. 2 Plane thermal stress of simple supported beam under temperature variation

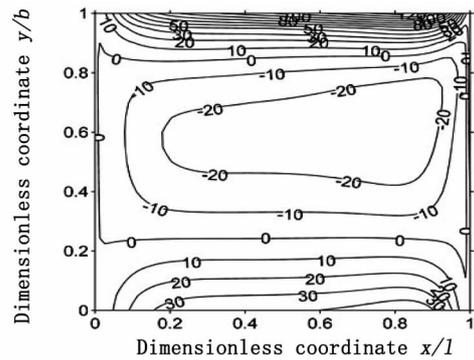
平面坐标	解析解/MPa	有限元解/MPa	误差%
(0,5.0)	40.00	39.89	0.28
(0,4.5)	28.60	28.49	0.39
(0,4.0)	18.40	18.29	0.60
(0,3.5)	9.40	9.29	1.18
(0,3.0)	1.60	1.49	7.37
(0,2.5)	-5.00	-5.11	2.15
(0,2.0)	-10.40	-10.51	1.05
(0,1.5)	-14.60	-14.71	0.75
(0,1.0)	-17.60	-17.71	0.62
(0,0.5)	-19.40	-19.51	0.56
(0,0.0)	-20.00	-20.11	0.55
(0,-0.5)	-19.40	-19.51	0.56
(0,-1.0)	-17.60	-17.71	0.62
(0,-1.5)	-14.60	-14.71	0.75
(0,-2.0)	-10.40	-10.51	1.05
(0,-2.5)	-5.00	-5.11	2.15
(0,-3.0)	1.60	1.49	7.37
(0,-3.5)	9.40	9.29	1.18
(0,-4.0)	18.40	18.29	0.60
(0,-4.5)	28.60	28.49	0.39
(0,-5.0)	40.00	39.89	0.28

从表 2 可以发现:两者解法的最大误差为 7.37%,显然误差较大,但如果在应力值都只保留 1 位有效数字的情况下,误差将均为 0%,加之应力值本身也很小,故仍可认为有限元计算结果是有效的。

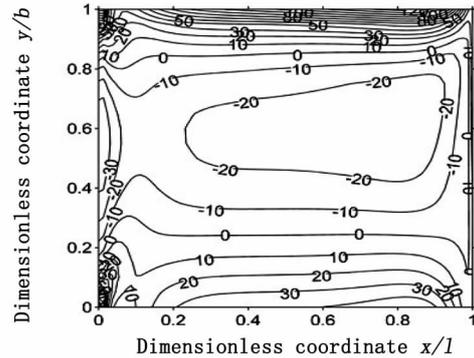
### 4 热应力场分布和分析

如图 1 所示模型,取组分形状分布系数  $m_x$  和  $m_y$  为 1.0,孔隙率控制参数  $A_x$  和  $A_y$  取 0.0,  $n_x, n_y, z_x$  和  $z_y$  均取为 1.0,其换热边界条件为前面所述式(1)和式(2),按图 2 所示的外部约束,即简支、一端固定、两端固定和四端固定 4 种位移边界条件,得到  $t = 1.0$  s 时的冷却瞬态热应力场分布图形,

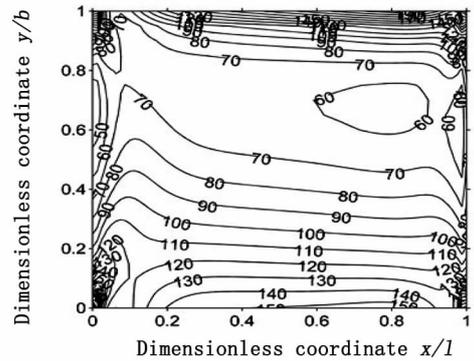
如图 4 所示。



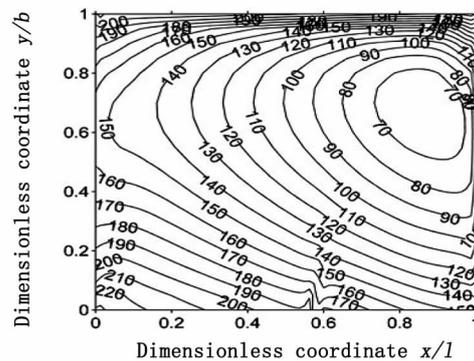
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4 不同约束条件下的常物性 2D-FGM 区域冷却瞬态热应力分布

Fig. 4 Transient thermal stresses distribution of 2D-FGM plate under different constrain conditions during cooling

我们知道,位移边界的不同是不会引起温度场变化的,那么在各种计算相同,换热边界条件相同的情况下,常物性2D-FGM平面区域的温度场分布在不同位移约束条件下应当是保持一致的。并且根据热弹性力学理论,若FGM平面区域的左右两个边界是自由边界,那么边界上的热应力 $\sigma_x=0$ 。

分析图4可知:冷却情况下,位移边界条件对常物性2D-FGM平面区域冷却瞬态热应力分布影响颇大。

观察图4(a)和4(b)可知,在简支情况下,平面区域的左右两个边界都是自由边界,在一端固定情况下,平面区域的右边界是自由边界,因此,这些边界上的热应力 $\sigma_x=0$ ;从图4(a)变化到图4(b),即将左边界设置为固定约束后,在平面的左边界上形成了上中下三个应力聚集,但应力值几乎没有发生变化,整个区域既存在压应力又存在拉应力。

图4(c)中,将左右边界均设置为固定约束后,其右边界不仅也产生了相同现象,而且区域内部应力分布形状与数值都发生了巨大变化:平面中部应力分布曲线更加不平行于 $x$ 坐标方向,区域内部应力值全部成为拉应力,且数值增长幅度颇为显著;将四周均设置呈固定约束后,如图4(d)所示,平面四角上的应力聚集消失,热应力数值增长幅度较两端固定情况时更为明显。

## 5 结论

冷却过程中,位移边界条件对常物性2D-FGM平面区域冷却瞬态热应力分布影响颇大,将四周均设置呈固定约束后,平面四角上的应力聚集消失,应力凸起位置移动到平面右上部位,热应

力数值增长幅度较两端固定情况时更为明显。

## 参考文献:

- [1]李信,刘海昌. 功能梯度材料的研究现状及展望[J]. 材料导报,2012,26(19):370-372.
- [2]马涛,赵忠民,刘良祥,等. 功能梯度材料的研究进展及应用前景[J]. 化工科技,2012,20(1):71-75.
- [3]WUXIANG LIU, ZHENG ZHONG. Three-dimensional thermoelastic analysis of functionally graded plate[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2011,24(3):241-249.
- [4]许杨健,涂代惠,马士进. 加热、冷却下变物性梯度功能材料板瞬态热应力[J]. 机械强度,2005,27(4):510-517.
- [5]M R GOLBAHAR HAGHIGHI, P MALEKZADEH, H RAHIDEH, et al. Inverse Transient heat conduction problems of a multilayered functionally graded cylinder[J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. 2012(9):717-733.
- [6]许杨健,王飞,杜海洋. 初始和边界恒温时二维梯度板瞬态温度场[J]. 固体力学学报,2014(2):3-6.
- [7]许杨健,王飞,杜海洋,等. 边界不同恒温时功能梯度板平面稳态温度场[J]. 河北工程大学学报:自然科学版,2013,30(2):4-8.
- [8]OBATA Y, NODA N. Unsteady thermal stresses in a functionally gradient material plate (Analysis of one-dimensional unsteady heat transfer problem)[J]. Trans. JSME, 1993,59(560):1090-1096.
- [9]王洪纲. 热弹性力学概论[M]. 北京:清华大学出版社,1989.
- [10]严宗达,王洪礼. 热应力[M]. 北京:高等教育出版社,1993.

(责任编辑 刘存英)

(上接第30页)性会降低。因此在保证延性设计的要求下,角钢厚度满足节点承载力即可。

4)梁高对节点初始转动刚度及抗弯承载能力的影响很大,节点的初始转动刚度及抗弯承载能力均随梁高的增加而增大,因此增加梁截面高度可以有效的提高节点的初始转动刚度及抗弯承载能力。

## 参考文献:

- [1]陈雨,雷敏. 节点域对无横向加劲肋节点延性影响[J]. 河北工程大学学报:自然科学版,2014,31(2):4-8.
- [2]王燕. 钢结构半刚性连接设计理论及其工程应用

[M]. 北京:中国建筑工业出版社,2011.

- [3]李国强,范昕,孙飞飞,等. 波纹腹板H型钢梁柱铰接节点静力性能试验研究及有限元分析[J]. 建筑结构学报,2013(4):107-114.
- [4]罗振亮. 波纹腹板H型钢梁柱刚性连接节点域的性能研究[D]. 邯郸:河北工程大学,2014.
- [5]张哲. 波纹腹板H型钢及组合梁力学性能理论与试验研究[D]. 上海:同济大学,2009.
- [6]张春玉,沈岩,赵延林,等. 六边形孔蜂窝梁挠度实验与有限元分析[J]. 黑龙江科技大学学报,2014,4(3):312-316.
- [7]CECS 291,2011 波纹腹板钢结构技术规程[S].

(责任编辑 刘存英)