

## 多次采样 $m$ 序列法辨识 LTI 脉冲响应计算方法

方俊初, 聂启燕

(安徽工程大学 电气工程学院, 安徽 芜湖 241000)

**摘要:**研究一个时钟周期内多次采样条件下  $m$  序列法辨识线性时不变系统脉冲响应的计算方法, 推导出脉冲响应序列与  $m$  序列周期、幅度及采样率之间的关系表达式。将双极性  $m$  序列信号的自相关特性进行均匀抽样, 写成全周期内的统一表达式, 代入维纳-何甫方程, 再利用循环右移矩阵将脉冲响应用输入、输出采样序列表达出来。在 matlab 平台上对算法进行仿真实验, 结果证明这种算法是正确的。

**关键词:**脉冲响应;  $m$  序列法; 多次采样; 相关辨识

**中图分类号:** TN91; TP202

**文献标识码:** A

### Algorithm for identification of LTI impulse response with multiple sampling $m$ sequence

FANG Junchu, NIE Qiyuan

(School of Electrical Engineering, Anhui Polytechnic University, Wuhu Anhui, 241000, China)

**Abstract:** An algorithm for identification of linear time-invariant system impulse response was studied by using  $m$ -sequence under the condition of multiple sampling within one clock cycle series. An expression described impulse response sequence with the  $m$ -sequences' cycle, amplitude and the sampling rate was derived. For this purpose, the bipolar  $m$ -sequence signal autocorrelation property was sampled uniformly, and the unified expression in whole cycle was given and was introduced into Wiener-Hopf calculation to obtain the system's impulse response. Then, the system's impulse response was expressed as the sequences of the input signal and output signal with the cyclic shift matrix. Simulation on the MATLAB platform proved the correctness of the algorithm.

**Key words:** impulse response;  $m$  sequence method; multiple sampling; related identification

一个线性时不变系统, 若已知其输入信号为  $f(t)$ , 相应的输出信号为  $y(t)$ , 干扰信号为  $n(t)$ , 则可以用相关技术求出系统的脉冲响应<sup>[1]</sup>。 $m$  序列的特性类似于白噪声, 常在系统辨识过程中作为输入信号<sup>[2-4]</sup>, 通过对输入输出信号的互相关运算, 就可以得到待测系统的脉冲响应, 以下简称  $m$  序列法,  $m$  序列法是一个简单有效的过程<sup>[5]</sup>。近年来,  $m$  序列法的研究主要有两个方面: 一是研究如何根据输入输出的采样信号获得系统脉冲响应的算法, 二则是在此基础上获得系统的一些参数模型。在算法方面, 陆续有人提出了一些比较实用的算法<sup>[6-8]</sup>, 但这些算法有的是针对互相关

函数的, 有的忽略了  $m$  序列的一些重要参数, 其中大多数都是在一个脉冲周期采样一次的情况下计算的, 有时为了提高计算互相关函数的准确度, 需要增大信号的采样率<sup>[1]</sup>。本文从  $m$  序列自相关函数的离散化开始, 推导了脉冲响应序列与互相关序列的关系, 再用转移矩阵将脉冲序列用输入、输出采样序列表达出来。

### 1 脉冲响应序列与互相关序列的关系

为了获得系统的脉冲响应, 将双极性  $m$  序列信号作为试验信号加入到图示的线性系统中。

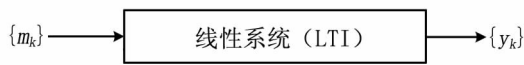


图1 脉冲响应测试原理图

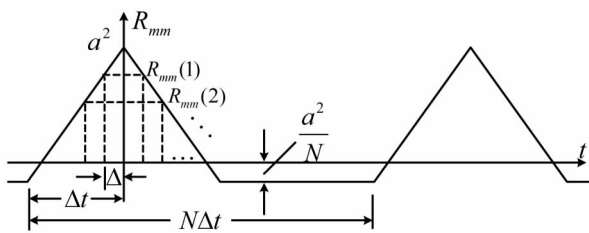
Fig.1 Diagram of Pulse response testing

维纳-何甫方程的离散形式<sup>[9]</sup>为:

$$R_{my}(k) = h(k) * R_{mm}(k) \quad (1)$$

其中,  $\{m_k\}$  和  $\{y_k\}$  分别是输入信号与输出信号在一个周期内的均匀采样序列;  $R_{my}$  是  $\{m_k\}$  和  $\{y_k\}$  间的互相关序列;  $R_{mm}(k)$  是输入的  $m$  序列的自相关序列;  $h(k)$  为系统的脉冲响应序列;  $*$  是卷积运算。

设  $m$  信号的周期为  $N$ , 码元宽度为  $\Delta t$ , 幅度为  $\pm a$ , 则其自相关特性如图2所示<sup>[11]</sup>。图中  $\Delta$  为输入、输出信号的采样间隔, 并设  $\Delta t = L\Delta$  ( $L$  是正整数, 且  $L \ll N$ )。

图2  $m$  序列自相关特性Fig.2 Autocorrelation property of  $m$  sequence

根据相似三角形的知识很容易得出其自相关函数的采样序列为:

$$R_{mm}(k) = \begin{cases} \frac{L-|k|}{L} \left(1 + \frac{1}{N}\right) a^2 & (-L \leq k \leq L) \\ -\frac{1}{N} a^2 & (L \leq k \leq L(N-1)) \end{cases} \quad (2)$$

定义  $A = \left(1 + \frac{1}{N}\right) a^2$ , 并利用取样序列的性质将(2)式写成全周期内的统一表达式:

$$\begin{aligned} R_{mm}(k) &= \sum_{i=-L+1}^{L-1} \delta(k-i) \frac{L-|i|}{L} A - \frac{1}{N} a^2 \\ &= \frac{1}{L} A \delta(k+L-1) + \frac{2}{L} A \delta(k+L-2) + \cdots + \\ &\quad \frac{L-1}{L} A \delta(k+1) + A \delta(k) + \frac{L-1}{L} A \delta(k-1) + \\ &\quad \frac{L-2}{L} A \delta(k-2) + \cdots + \frac{1}{L} A \delta(k-L+1) - \frac{1}{N} a^2 \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $k$  的取值范围是  $-L \leq k \leq L(N-1)$ 。

将(3)式代入(1)式中, 并根据卷积运算的性质有:

$$\begin{aligned} R_{my}(k) &= \frac{1}{L} A h(k+L-1) + \frac{2}{L} A h(k+L-2) + \cdots + \\ &\quad \frac{L-1}{L} A h(k+1) + A h(k) + \frac{L-1}{L} A h(k-1) + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{L} A h[k-(L-1)] - \frac{1}{N} a^2 \sum_{i=0}^{LN-1} h(i) \quad (-L \leq k \leq L(N-1)) \end{aligned} \quad (4)$$

当  $-L < k < 0$  时, 也就是  $k$  位于系统调整时间  $T_s$  的末端, 此时  $h(k) \approx 0$ , 无需通过(4)式求解  $h(k)$ ; 同样的道理, 当  $k = (N-1)L$  时, (4)式中  $h(\cdot)$  均为零<sup>[10]</sup>, 可得:

$$R_{my}[(N-1)L] = R_{my}(-L) = -\frac{1}{N} a^2 \sum_{i=0}^{LN-1} h(i) \quad (5)$$

当  $k \geq (L-1)$  时,  $h(\cdot)$  均近似为  $h(k)$ , (4)式写成:

$$\begin{aligned} R_{my}(k) &= 2Ah(k) \left\{ \frac{1}{L} + \frac{2}{L} + \cdots + \frac{L-2}{L} + \frac{L-1}{L} \right\} + \\ &\quad Ah(k) + R_{my}(-L) = LAh(k) + R_{my}(-L) \end{aligned} \quad (6)$$

可得  $h(k)$  与  $R_{my}(k)$  的关系式为:

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{La^2} \frac{N}{1+N} [R_{my}(k) - R_{my}(-L)] \\ &\quad [L-1 \leq k \leq L(N-1)] \end{aligned} \quad (7)$$

当  $0 \leq k < (L-1)$  时, 在(4)式将有部分  $h(\cdot) = 0$ , 去掉后即:

$$\begin{aligned} R_{my}(k) &= LAh(k) - R_{my}(-L) - Ah(k) \left\{ \frac{1}{L} + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{L} + \cdots + \frac{L-(k+1)}{L} \right\} = \frac{L^2 - k^2 + 2Lk + L - k}{2L} Ah(k) + \\ &\quad R_{my}(-L) \end{aligned} \quad (8)$$

此时  $h(k)$  与  $R_{my}(k)$  的关系式为:

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{La^2} \frac{N}{1+N} \frac{2L^2}{L^2 - k^2 + 2Lk + L - k} [R_{my}(k) - \\ &\quad R_{my}(-L)] \quad (0 \leq k < (L-1)) \end{aligned} \quad (9)$$

总之, 若设一系数函数  $Q$ , 则  $h(k)$  与  $R_{my}(k)$  的关系式为:

$$\begin{aligned} h(k) &= \frac{1}{La^2} \frac{N}{1+N} Q \frac{2L^2}{L^2 - k^2 + 2Lk + L - k} [R_{my}(k) - \\ &\quad R_{my}(-L)] \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$Q = \begin{cases} \frac{2L^2}{L^2 - k^2 + 2Lk + L - k} & 0 \leq k < L-1 \\ 1 & L-1 \leq k \leq L(N-1) \\ 0 & L(N-1) < k \leq LN-1 \end{cases} \quad (11)$$

## 2 脉冲响应序列的计算方法

根据互相关序列的定义, 写成矩阵形式为:

$$R_{my}(k) = \frac{1}{LN} [M] [Y]' \quad (0 \leq k \leq LN - 1) \quad (12)$$

其中,  $[Y]$  是输出响应向量;  $[M]$  是  $LN$  阶方阵, 第一行元素是  $m$  序列在一个周期内的采样值<sup>[11-12]</sup>, 可用行向量表示  $[M_1] = (m_0, m_1, m_2 \cdots m_{LN-1})$ , 第  $k$  行是将第一行循环右移  $k$  位后得到的, 构造一循环右移矩阵  $[P]$ , 则:

$$R_{my}(k) = \frac{1}{LN} [M_1] [P]^k [Y]' \quad (k = 0, 1, 2 \cdots LN - 1) \quad (13)$$

也容易知道

$$R_{my}(-L) = \frac{1}{LN} [M_1] [P']^L [Y]' \quad (14)$$

其中循环右移矩阵  $[P]$  是  $LN \times LN$  阶矩阵, 可分解为四个子矩阵, 即:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中  $P_{11}$ 、 $P_{22}$  都是零矩阵, 而  $P_{12}$ 、 $P_{21}$  都是单位矩阵, 因此构建矩阵  $[P]$  非常容易, 从而使脉冲响应的计算更加直观、简便。

把式(13)、(14)代入式(10)可得:

$$h(k) = \frac{1}{(La)^2(1+N)} Q \{ [M_1] [P]^k [Y]' + [M_1] [P']^L [Y]' \} \quad (0 \leq k \leq LN - 1) \quad (16)$$

### 3 仿真过程及结果

仿真环境 matab7.0。假定某系统的传递函数如下:

$$H(z) = \frac{0.2 + 0.1z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1} - 0.6z^{-2}} \quad (17)$$

将周期扩展后的  $m$  序列按要求形成采样信号输入系统并获得输出序列, 从中任取对应长度为  $LN$  的序列代入式(16), 即可获得脉冲响应序列。

用理想脉冲信号激励该系统, 理想脉冲响应如图3所示:

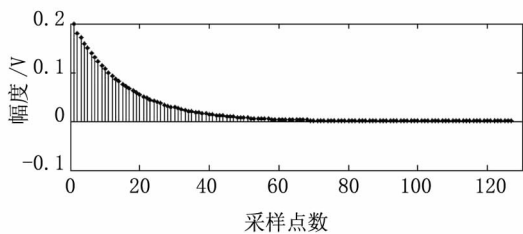


图3 系统的理想脉冲响应

Fig.3 Ideal impulse response of the system

用幅度为  $\pm 2V$  周期  $N = 127$  的  $m$  序列信号激励该系统, 并计算出系统的脉冲响应, 图4为每个  $\Delta t$  采样4次的结果(图中只显示前127个采样点)。

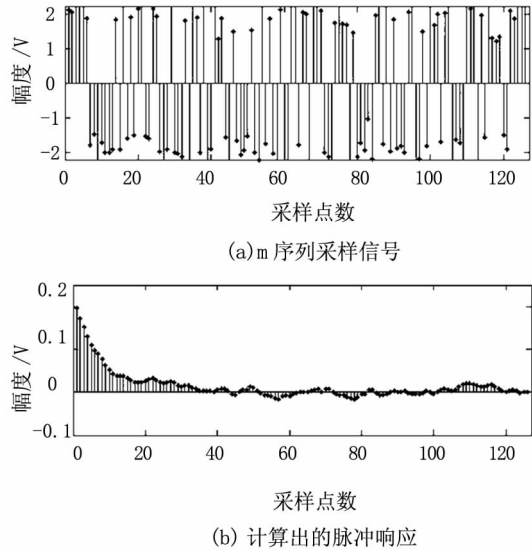


图4  $a=2, L=4$  时脉冲响应结果

Fig.4 The calculated impulse response with  $a=2$  and  $L=4$

理想脉冲信号如果混入白噪声, 激励系统后产生的脉冲响应如图5所示, 可见其和实际脉冲响应相去甚远。

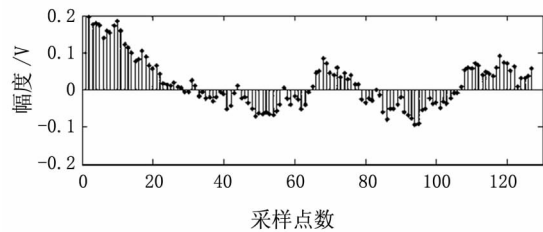


图5 含噪声脉冲激励系统后的响应

Fig.5 Response of the system excited by the pulse with noise

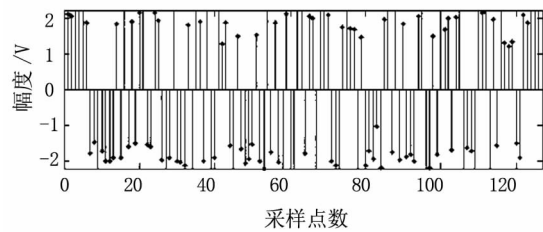
将同样强度的白噪声混入  $m$  序列信号中并激励系统, 系统响应如图6。其中图6(a)为  $m$  序列混入噪声后的采样信号, 图6(b)为计算出的脉冲响应。可见在有白噪声的情况下, 计算出的脉冲响应和实际的脉冲响应仍是十分相近的。

### 4 结论

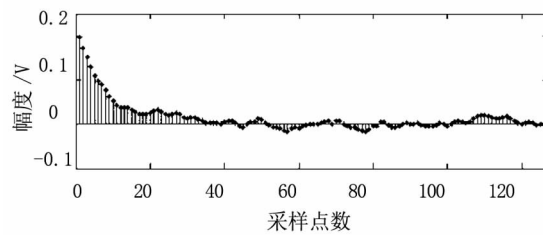
1)  $L > 1$  时脉冲响应计算公式和  $L = 1$  时相比, 主要区别是第一个  $\Delta t$  和最后一个  $\Delta t$  内的采样点需要修正, 本文从  $m$  序列的自相关特性离散化入手, 给出了修正函数  $Q$ 。

2) 算法推导过程简明易于理解, 且考虑了  $m$

序列信号的周期、幅值以及  $\Delta t$  内的采样次数,仿真实验证明了它的正确性。



(a)  $m$  序列采样信号



(b) 计算出的脉冲响应

图6  $m$  序列叠加噪声后辨识的脉冲响应 ( $L=2$ )

Fig.6 The calculated impulse response excited by  $m$  sequence with noise ( $L=2$ )

#### 参考文献:

- [1] 李白男. 伪随机信号及相关辨识[M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [2] 方俊初, 吕虹, 张爱雪. 产生  $m$  子序列的一种实用算法[J]. 河北工程大学学报: 自然科学版, 2012, 29(4): 79-82.
- [3] 方俊初, 吕虹. 由  $m$  序列生成非线性序列的 C 语言实现[J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2013, 34(6): 47-49.
- [4] 方俊初, 吕虹, 张爱雪. 由  $m$  序列构造的同级类由  $m$  序列及性能研究[J]. 河北工程大学学报: 自然科学版, 2015, 32(2): 90-93.
- [5] 姜晓云, 杨春花. 运用  $m$  序列测量脉冲响应分析[J]. 山西大同大学学报: 自然科学版, 2007(4): 53-57.
- [6] 黄翔东, 李文元, 王兆华. 基于快速  $m$  序列变换的线性网络冲激响应测量算法[J]. 数据采集与处理, 2006, 21(2): 142-148.
- [7] 杨春花. 运用  $m$  序列测量房间脉冲响应的技术研究[D]. 天津: 天津大学, 2007.
- [8] 杨春花, 李文元, 王兆华. 运用 gold 伪随机序列测量 LTI 系统的脉冲响应[J]. 电子测量与仪器学报, 2006(10): 82-84.
- [9] 罗鹏飞, 张文明. 随机信号分析与处理[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [10] XIANG Ning. Using M-sequences for determining the impulse responses of LTI systems[J]. Signal Processing, 1992, 28(2): 139-152.
- [11] MOMMERTZ E, MULLER S. Measuring impulse response with digitally pre-emphasized pseudorandom noise derived from maximum-length sequences[J]. Applied Acoustics, 1995, 44(3): 195-214.
- [12] CHU W T. Impulse response and reverberation-decay measurements made by using a periodic pseudorandom Sequence[J]. Applied Acoustics, 1990(29): 193-205.

(责任编辑 王利君)

## 声 明

为适应我国信息化建设的需要、提高本刊的学术影响力、扩大作者知识信息交流渠道,本刊已许可中国学术期刊(光盘版)电子杂志社、万方数据库等以数字化方式通过信息网络传播本刊全文。作者向本刊提交文章发表的行为即视为同意我刊上述声明。