文章编号:1673-9469(2016)04-0010-04 doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2016.04.003

I-II-III 复合型裂缝应力强度因子与能量释放率的关系

曹晨曦,王向东,吴 京
(河海大学 力学与材料学院,江苏 南京 210098)

摘要:基于断裂力学理论,应用复合型断裂判据中的最大周向应力判据和最大拉应变判据,以单一型裂缝应力强度因子 K 与能量释放率 G 的关系为基础,推导出 I-II-III 复合型裂缝应力强度因子 K_{I}、K_{II}、K_{III} 与能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}$ 关系公式;并应用有限元软件进行 I-II-III 复合型裂缝的有限元模拟,模拟值与理论值之间相差为 1.14%,拟合良好,分析验证了复合型裂缝应力强度因子 K_{I}、K_{II}、K_{III} 与能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}$ 关系公式的合理性。

关键词:I-II-III 复合型裂缝;应力强度因子;能量释放率;有限元模拟
中图分类号:TV313 **文献标识码**:A

Relationship between stress intensity factor and strain energy release rate of I-II-III mixed mode cracks

CAO Chenxi, WANG Xiangdong, WU Jing
(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Jiangsu Nanjing 210098, China)

Abstract: Based on the theory of fracture mechanics, the maximum stress criterion and the maximum principal strain criterion, the relationship between stress intensity factor and strain energy release rate of I-II-III mixed mode cracks was studied. And the I-II-III mixed mode fracture cracks were simulated by using the finite element software. And the relative error between the simulated value and the theoretical value is , which is within the tolerance range. It is shown that the formula of the relationship between stress intensity factor and strain energy release rate of I-II-III mixed mode cracks is reasonable.

Key words: I-II-III mixed mode cracks; stress intensity factor; strain energy release rate; finite element simulation

断裂力学是研究带裂纹结构的强度以及裂纹扩展规律的一门学科。很多混凝土结构不可避免的会带缝工作,因此在对带缝混凝土结构的安全分析中,较重要的任务就是研究裂缝的稳定性,而对混凝土结构裂缝安全性分析主要是基于线弹性断裂力学中的 K 判据与 G 判据,即分为两种不同的方法:应力强度因子法和能量释放率法。在弹性范围内,应力强度因子 K 与能量释放率 G,是断裂力学中的两个重要断裂参数。因此不仅应该研究它们的计算方法,而且还应该研究二者之间的关系。目前,对单一型裂缝的强度因子 K 与能量释放率 G 的关系已有完善的研究和相应的理论公式[1],但在实际工程中,纯单一型裂缝很少,大多数结构所受的荷载都是多向复杂型的,裂缝也是复合型的,因此对于复合型裂缝应力强度因子 K 与能量释放率 G 关系的研究是有必要的。本文以带穿透缝的无限大平面板为模型,基于最大应力准则和最大主应变准则,从断裂力学理论入手,并以单一型裂缝以及吴京等[2-6]推导出的 I-II 复合型裂缝、I-III 复合型裂缝和 II-III 复合型裂缝应力强度因子 K 与能量释放率 G 的关系的基础上,推导出 I-II-III 复合型裂缝应力强度因子 K_{I}、K_{II}、K_{III} 与能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}$ 的关系公式,并利用有限元软件对其进行分析验证。

收稿日期:2016-09-12
基金项目:国家自然科学基金资助项目(50878077);"十一五"国家科技支撑计划(2008BAB29B03)
作者简介:曹晨曦(1993-),女,江苏泰兴人,硕士,主要研究方向为工程断裂与损伤。

1 I－II－III 复合型裂缝 K_{I}、K_{II}、K_{III} 与 $G_{\mathrm{I-II-III}}$的关系

根据线弹性断裂力学理论，I－II－III 复合型裂缝可以分解为四种情况：I－II 复合型裂缝与 III 型裂缝叠加；II－III 复合型裂缝与 I 型裂缝叠加；I－III 复合型裂缝与 II 型裂缝叠加；I 型裂缝、II 型裂缝与 III 型裂缝叠加。由于 I 型和 II 型断裂问题属于平面问题，III 型断裂问题属于空间问题，本文采用 I－II 复合型裂缝与 III 型裂缝叠加的方法来计算 I－II－III 复合型裂缝应力强度因子 $K_{\mathrm{I-II-III}}$与能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}$的关系。其应力场以及位移场公式由叠加原理得：

应力场：

$$\sigma_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right] \tag{1}$$

$$\sigma_y=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \tag{2}$$

$$\tau_{xy}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right] \tag{3}$$

$$\tau_{xz}=-\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{4}$$

$$\tau_{yz}=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2} \tag{5}$$

位移场：

$$2\mu u=\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left(k-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta}{2}\left(k+1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{6}$$

$$2\mu v=\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\theta}{2}\left(k+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\theta}{2}\left(-k+1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{7}$$

$$w=\frac{K_{\mathrm{III}}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2} \tag{8}$$

由功的叠加原理可得 I－II－III 复合型裂缝扩展所做的功等于 I－II 复合型裂缝扩展所做的功、III 型裂缝扩展所做的功及 I－II 复合型裂缝在 III 型裂缝扩展方向所做的功和 III 型裂缝在 I－II 复合型裂缝扩展方向所做的功之和。

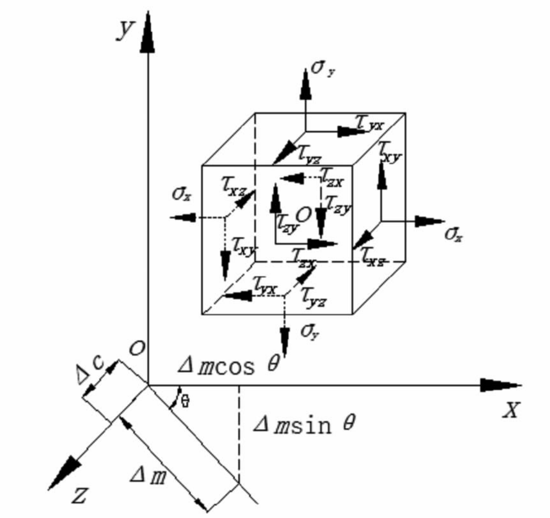

图1　I-II-III复合型裂缝尖端局部区域0点处应力单元体

Fig. 1　Stress element at the point 0 in partial area of I-II-III mixed mode crack tip

如图 1 所示，I－II 复合型裂缝在其扩展方向上扩展的长度为 Δm，θ 为 I－II 复合型裂缝的开裂角；纯 III 型裂缝在其扩展方向上扩展的长度为 Δc，其开裂角 θ 等于 0。则裂缝开裂时所需要的能量为：

$$\begin{aligned}W_{\mathrm{I\text{-}II\text{-}III}}=&\int_0^{\Delta m\cos\theta}\sigma_x uB\mathrm{d}x+\int_0^{\Delta m(-\sin\theta)}\sigma_y vB\mathrm{d}y+\\&\int_0^{\Delta m\cos\theta}\tau_{yx}uB\mathrm{d}x+\int_0^{\Delta m(-\sin\theta)}\tau_{xy}vB\mathrm{d}y+\\&\int_0^{\Delta c}\tau_{yz}\omega\Delta b\mathrm{d}z+\int_0^{\Delta c}\tau_{xz}\omega\Delta b\mathrm{d}z+\\&\int_0^{\Delta m(-\sin\theta)}\tau_{zy}vB\mathrm{d}y+\int_0^{\Delta m\cos\theta}\tau_{zx}uB\mathrm{d}x\\=&\int_0^{\Delta m\cos\theta}c_1\frac{1}{2\pi}\frac{2\Delta c}{\mu}\sqrt{\frac{\Delta m-x}{x}}\mathrm{d}x+\\&\int_0^{\Delta m(-\sin\theta)}c_2\frac{1}{2\pi}\frac{2\Delta c}{\mu}\sqrt{\frac{\Delta m-y}{y}}\mathrm{d}y\\&+\int_0^{\Delta m\cos\theta}c_3\frac{1}{2\pi}\frac{2\Delta c}{\mu}\sqrt{\frac{\Delta m-x}{x}}\mathrm{d}x+\\&\int_0^{\Delta m(-\sin\theta)}c_4\frac{1}{2\pi}\frac{2\Delta c}{\mu}\sqrt{\frac{\Delta m-y}{y}}\mathrm{d}y+\frac{K_{\mathrm{III}}^2\Delta c\Delta m}{2\mu}\end{aligned}$$

$$=\frac{b_1(c_1+c_3)}{\pi}\cdot\frac{\Delta c\Delta m}{\mu(1+\upsilon')}+\frac{b_2(c_2+c_4)}{\pi}\cdot\frac{\Delta c\Delta m}{\mu(1+\upsilon')}+\frac{K_{\mathrm{III}}^2\Delta c\Delta m}{2\mu}=g(\theta,K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{II}})\ \frac{2\Delta c\Delta m}{E}+\frac{(1+\upsilon')K_{\mathrm{III}}^2\Delta c\Delta m}{E}\tag{9}$$

其中,

$$g(\theta,K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{II}})=\frac{b_1(c_1+c_3)+b_2(c_2+c_4)}{\pi}\tag{10}$$

由$G_{\text{I-II-III}}=\frac{\partial W}{\partial A}$[7]得:

$$G_{\text{I-II-III}}=\frac{\partial W}{\partial A}=\frac{\partial W}{\partial(\Delta c\Delta m)}=g(\theta,K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{II}})\frac{2}{E}+\frac{(1+\upsilon')K_{\mathrm{III}}^2}{E}\tag{11}$$

其中,

$$\begin{aligned}b_1&=\frac{1}{2}\sin(2\arccos\sqrt{\cos\theta})-\arccos\sqrt{\cos\theta}+\frac{\pi}{2}\\ b_2&=\frac{1}{2}\sin(2\arccos\sqrt{-\sin\theta})-\arccos\sqrt{-\sin\theta}+\frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{12}$$

c_i 为与扩展角 θ 有关的函数,$i=1、2、3、4$,具体算式如下:

$$\begin{aligned}c_1=&\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)-K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot\\&\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\beta}{2}\left(-1+\upsilon'+(1+\upsilon')\sin^2\frac{\beta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\beta}{2}\left(2+(1+\upsilon')\cos^2\frac{\beta}{2}\right)\right]\\ c_2=&\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot\\&\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\beta}{2}\left(2-(1-\upsilon')\cos^2\frac{\beta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\beta}{2}\left(-1+\upsilon'+(1+\upsilon')\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right]\\ c_3=&\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot\\&\left[K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\beta}{2}\left(-1+\upsilon'+(1+\upsilon')\sin^2\frac{\beta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\beta}{2}\left(2+(1+\upsilon')\cos^2\frac{\beta}{2}\right)\right]\\ c_4=&\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}\cdot\\&\left[K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\beta}{2}\left(2-(1-\upsilon')\cos^2\frac{\beta}{2}\right)+K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\beta}{2}\left(-1+\upsilon'+(1+\upsilon')\sin^2\frac{\beta}{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{13}$$

其中$\beta=-\theta+\pi$。

式(11)即为 I–II–III 复合型裂缝应力强度因子 K_{I}、K_{II}、K_{III}与能量释放率 $G_{\text{I-II-III}}$的关系式。

2 I–II–III 复合型裂缝 K_{I}、K_{II}、K_{III} 与 $G_{\text{I-II-III}}$关系的验证

2.1 公式的退化分析验证

当 $K_{\mathrm{II}}=0,\theta=0,K_{\mathrm{III}}=0$,且取平面应力状态时,则 I–II–III 复合型裂缝退化为纯 I 型裂缝,公式(1–11)可以简化为:

$G_{\text{I-II-III}}=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{E}$,与纯 I 型裂缝的 K 与 G 关系相同,验证了公式的合理性。

当 $K_{\mathrm{I}}=0,K_{\mathrm{III}}=0$,且取平面应力状态时,则 I–II–III 复合型裂缝退化为纯 II 型裂缝,公式(11)可以简化为:

$G_{\text{I-II-III}}=f(\theta)\frac{2K_{\mathrm{II}}^2}{E}$,与纯 II 型裂缝的 K 与 G 关系相同,验证了公式的合理性。

当 $K_{\mathrm{I}}=0,K_{\mathrm{II}}=0$,且取平面应力状态时,则 I–II–III 复合型裂缝退化为纯 III 型裂缝,公式(11)可以简化为:

$G_{\text{I-II-III}}=\frac{K_{\mathrm{III}}^2(1+\upsilon')}{E}$,与纯 III 型裂缝的 K 与 G 关系相同,验证了公式的合理性。

2.2 有限元分析验证

以带有中心穿透裂缝的结构作为研究对象，应用有限元分析软件 ANSYS 建立 I－II－III 复合型裂缝计算模型。有限大板的长度为 10 m，宽度为 4 m，中心穿透裂缝长为 0.5 m，厚度为 1 m，面上的拉应力为 1 MPa，面内的剪应力以及面外的剪应力都为 1 MPa，其荷载和约束情况如图 1 所示。泊松比为 0.167，弹性模量取 21 GPa，裂缝尖端设置了 24 个奇异点，裂缝尖端局部区域网格见图 2。

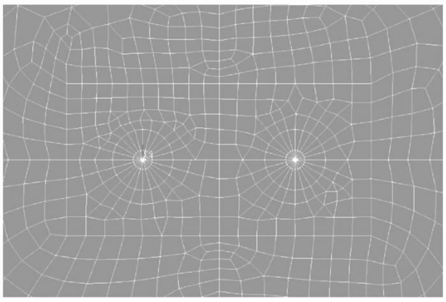

图2　裂缝尖端局部区域网格

Fig.2　Partial diagram of crack tip

经过有限元软件计算后，得到了 I－II－III 复合型裂缝的应力图以及应力强度因子 K 和能量释放率 G 的数值，图 3 裂缝尖端区域处应力图。

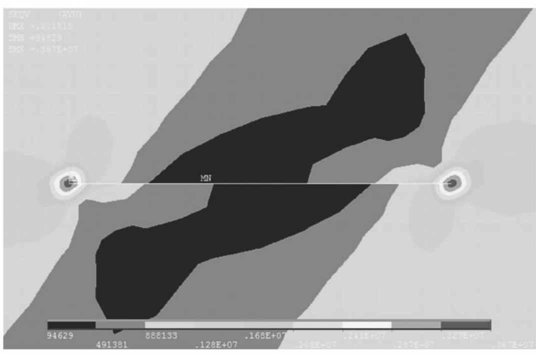

图3　I-II-III复合型裂缝尖端区域处应力图(Pa)

Fig.3　Stress diagram in partial area of I-II-III mixed mode crack tip(Pa)

通过有限元软件计算得：I 型裂缝应力强度因子 $K_{\mathrm{I}} = 0.95\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$，II 型裂缝应力强度因子 $K_{\mathrm{II}} = 0.81\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$，III 型裂缝应力强度因子 $K_{\mathrm{III}} = 0.94\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$，能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}^{有限元} = 128.3\ \mathrm{N/m}$。将 K_{I}、K_{II}、K_{III} 代入式（11），计算得 $G_{\mathrm{I-II-III}}^{公式} = 129.7\ \mathrm{N/m}$，$G_{\mathrm{I-II-III}}^{有限元}$ 与 $G_{\mathrm{I-II-III}}^{公式}$ 之间的绝对误差为 1.4 N/m，相对误差为 1.14%，小于 5%，验证了式（11）的合理性。

3 工程实例

在某压力容器筒体上有一长为 $2a = 0.2$ m 的穿透性长裂纹，与筒体周线的倾角为 $\beta = 45°$，筒体壁厚为 $t = 0.1$ m，半径为 $R = 5$ m，压力 $p = 0.02$ MPa。如图 4 所示，取裂缝周围一有限大板进行受力分析。

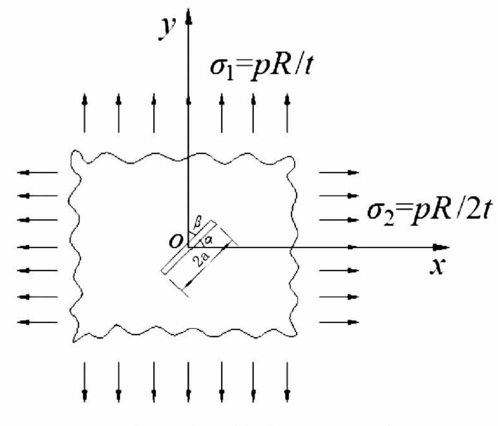

图4　压力容器壁上斜裂纹附近区域受力图

Fig.4　Force of oblique crack on pressure vessel wall

根据材料力学的应力状态理论，

$$\sigma_1 = \frac{pR}{t}, \sigma_2 = \frac{pR}{2t}$$

可以求得垂直于裂纹线的正应力为

$$\sigma_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)\cos 2\beta =$$

$$\frac{pR}{4t}(3 - \cos 2\beta) = \frac{3pR}{4t} = 0.25\ \mathrm{MPa}$$

相应的剪应力为

$$\tau_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\beta = \frac{pR}{4t}\sin 2\beta$$

$$= \frac{pR}{4t} = 0.25\ \mathrm{MPa}$$

且有

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\sqrt{\pi a} = 0.42\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$$

$$K_{\mathrm{II}} = \sigma\sqrt{\tau a} = 0.14\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$$

$$K_{\mathrm{III}} = 0$$

由最大周向应力理论可得，开裂角 $\theta_0 = -31.37°$[8]。

取参数 $\nu = 0.25$，$E = 2.1 \times 10^4$ MPa，将 $K_{\mathrm{I}} = 0.42\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$，$K_{\mathrm{II}} = 0.14\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$，$K_{\mathrm{III}} = 0$ 代入式（11）得 $G_{\mathrm{I-II-III}} = 7.6\ \mathrm{N/m}$，查阅文献[9]得 $K_{\mathrm{Ic}} = 0.5\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$，$K_{\mathrm{II_c}} = 0.35\ \mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$ 同上代入式（11）得混凝土的临界能量释放率 $Gc = 18.2\ \mathrm{N/m}$。显然，$G_{\mathrm{I-II-III}} < Gc$，（下转第 21 页）

[4]VAN GENUCHTEN R. Predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. Soil Sci. Soc. Am. J., 1980(44): 892－898.

[5]武海霞,张 铮,王洪义.东北黑土区非饱和土壤水分运动数值模拟研究[J].河北工程大学学报:自然科学版,2010,27(2):60－62.

[6]MUKHLISIN M,BAIDILLAH M R. Effect of soil hydraulic Properties model on slope stability analysis based on strength reduction method. [J]. Journal of the Geological Society of India,2014,83(5):586－594.

[7]范严伟,邓 燕,王波雷.土壤水分特征曲线 VG 模型参数求解对比研究[J].人民黄河,2008,30(5):49－50.

[8]彭建平,邵爱军.基于 Matlab 方法确定 VG 模型参数[J].水文地质工程地质,2006,6(7):25－28.

[9]伊盼盼,牛圣宽,柳燕子.非饱和土的土水特征曲线测试方法研究[J].中国农村水利水电,2016(1):125－128.

[10]李 峰,缴锡云.田间土壤水分特征曲线参数反演[J].河海大学学报:自然科学版,2009,37(4):374－377.

[11]刘小文,叶云雪.不同和影响因素下非饱和红土土－水特征曲线的实验研究[J].水文地质工程地质,2015,42(2):97－104.

[12]TH,M, VAN GENUCHTEN. A closed－form equation for predicting the hydraulic of conductivity of unsaturated soils.[J]. Soil Sci. Soc. Am. J., 1980(44): 892－898.

[13]BROOKS R. H, COREY A. T. PROPERR roperties of porous media affecting fluid flow[J]. J. Irrig. Drainage Div., ASCE Proc,1966,72(2):61－88.

(责任编辑　李军)

(上接第 13 页)裂缝处于稳定状态,结构处于安全状态,即本文所推导式(11)合理且有实际意义。

4 结论

基于最大应力准则和最大主应变准则,利用功的叠加原理,推导出线弹性条件下Ⅰ－Ⅱ－Ⅲ复合型裂缝 K 与 G 的关系。并对推导出的关系式进行了退化分析,验证了公式的合理性。利用有限元软件建立带有中心穿透缝的板模型,用有限元软件中计算所得的应力强度因子 K_{I}、K_{II}、K_{III} 代入推导所得的公式中计算出能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}^{公式}$,通过公式计算得到的 $G_{\mathrm{I-II-III}}^{公式}$ 与有限元软件中得到的能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}^{有限元}$ 进行比较,$G_{\mathrm{I-II-III}}^{有限元}$ 与 $G_{\mathrm{I-II-III}}^{公式}$ 之间的相对误差为 1.14%,小于 5%,表明本文推导的Ⅰ－Ⅱ－Ⅲ复合型裂缝应力强度因子 K_{I}、K_{II}、K_{III} 与能量释放率 $G_{\mathrm{I-II-III}}$ 的合理性。

参考文献:

[1]王 铎.断裂力学[M].哈尔滨:哈尔滨工业出版社,1989.

[2]吴 京.复合型裂缝应力强度因子和能量释放率的关系[J].济南大学学报:自然科学版,2014,28(6): 425－428.

[3]刘梦和.Ⅰ－Ⅱ复合型裂缝应力强度因子和应变能释放率的关系[J].水利水电科技进展,2012, 32(6): 31－33.

[4]邵 兵.空间复合型裂缝的性能参数[J]. 水利水电科技进展, 2012, 32(5): 52－55.

[5]KAPLAN M. F. Crack propagation and the fracture of concrete [J]. Journal of the American Concrete Institute, 1961, 58(5): 591－610.

[6]RICE J. R. Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1974, 22(1): 17－26.

[7]赵建生.断裂力学及断裂物理[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2003.

[8]洪启超.工程断裂力学基础[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1987.

[9]吴智敏.混凝土断裂韧度及临界裂缝尖端张开位移——基于虚拟裂缝模型的分析[J]. 三峡大学学报: 自然科学版, 2002,24(1):29－34.

(责任编辑　李军)