文章编号:1673-9469(2018)02-0044-05

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2018.02.010

非均匀颗粒二维动力性状的模拟与研究

董 岩,唐洪祥

(大连理工大学海岸和近海工程国家重点实验室,辽宁大连116024)

摘要:通过构造二维离散元模型,分析了土体在动荷载作用下的运动情况,并对任意时间步的应 力应变进行了分析。针对以往的单一颗粒的模拟,提出了运用两种不同形状的颗粒进行模拟,即 圆盘颗粒和椭圆盘颗粒。并且针对不同泊松比和弹性模量,利用 Hertz 接触理论,对圆盘圆盘接 触、圆盘椭圆盘接触以及圆盘或椭圆盘与四周边界的接触进行了讨论,并对具体接触的法向受力 以及颗粒重叠量进行了解析推导。最后通过变化不同动荷载的均值得到 *od- ed* 表示的"骨干曲线", 通过对"骨干曲线"的非线性模拟,得到土的动力本构模型。 关键词:二维;离散元; Hertz 接触理论;重叠量;动力本构模型

中图分类号:TU441.5 **文献标志码**:A

Simulation and research on two dimensional dynamic properties of non-uniform particles

DONG Yan, TANG Hongxiang

(The State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

Abstract: In this paper, the motion of the soil under dynamic loads is analyzed by constructing a two-dimensional discrete element model, and the stress and strain at any time step are analyzed. The simulation is made by using two different shapes of particles which are the disk particles and the elliptical disc particles, directed against the simulation of single particle in the past. And these two kinds of particles have different Poisson's ratio and elastic modulus. Using Hertz contact theory, the contact between disc particles, between disc particles and elliptical disk particles and between disk particles or elliptic disk particles and the surrounding boundary are discussed in this paper. The normal stress and the particle overlap of the specific contact are deduced. Finally, by changing the mean value of different dynamic loads, the "backbone curve" is obtained, and the dynamic constitutive model of soil can be obtained by the nonlinear simulation of the "backbone curve".

Key words: Two dimension, discrete element, the elliptical disc particles, Hertz contact theory, overlap, dynamic constitutive model.

土的动力特性是土动力学与岩土地震工程的基础,主要研究动荷载作用下土的变形和强度特性^[1]。 在对土体颗粒进行分析^[2]时,为了避免有限元模型 将颗粒材料作为连续体进行分析,不得不采用很多 假设而导致与实际结果契合不严谨。在 20 世纪 70 年代,离散元法被提出,用来研究散粒体的接触关 系以及颗粒材料与边界面之间的接触^[3-5]。在常规二 维离散元分析中,一般采用圆盘^[6]进行分析,但几 乎所有自然界中颗粒的形状都不是圆形的,仿真模 拟效果较牵强^[7]。而且大多模型采用的均是均一性 颗粒(均一性圆盘颗粒、均一性椭圆盘颗粒^[8])进行 颗粒模拟计算^[9-16]。签于此,本文综合圆盘颗粒和

收稿日期: 2018-01-29

基金项目:地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室开放基金(SKLGP2017K023);大连理工大学基本科研业务费资助项目 (DUT16ZD211);自然科学基金重点项目(51639002)

作者简介: 董岩 (1993-), 男, 安徽宿州人, 硕士, 从事三维离散元 - Cosserat 连续体参数确定及其应用的研究。

椭圆盘颗粒的优缺点,分别采用圆盘和椭圆盘颗粒 对土体颗粒进行模拟分析,并通过合理选择圆盘和 椭圆盘的方程,得到一个较为简化的分析模型,研 究双轴作用下颗粒的动载荷响应。

1 模型介绍

本模型作如下假设:接触采用粘弹性模型,圆 盘与圆盘之间、椭圆形与圆形颗粒之间有法向力、 切向力,圆盘、椭圆盘与左右边界仅有法向力,与 上下边界有法向力和切向力作用。

在生成最初颗粒时,为了使颗粒在最初排列时 规律较为明确,对椭圆盘的尺寸进行规定,使其恰 能占据两个圆盘所占的空间,如图1所示。

首先确定椭圆方程:设为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,左侧 圆的方程为 $(x+r)^2 + (y-2r)^2 = r^2$,容易得到a=2r,下面 求解b。如图2所示,左侧圆圆心与切点连线和y轴成角 β ,运用几何关系可得切点坐标可以表示为 $(r\sin\beta - r, 2r-r\cos\beta)$,带入椭圆方程得:

$$\frac{(r\sin\beta - r)^2}{a^2} + \frac{(2r - r\cos\beta)^2}{b^2} = 1$$
(1)

圆和椭圆在切点斜率相等,对于椭圆,有 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0, \quad 即_{y'} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}, \quad 对 于 圆, \quad f$ $2(x+r)+2(y-2r)y' = 0, \quad \Pi_{y'} = -\frac{x+r}{y-2r}, \quad 将切点坐标$

带入并令两式相等,有

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{\sin\beta - 1}{2 - \cos\beta} = -\frac{r\sin\beta}{-r\cos\beta}$$
(2)



图 1 初始颗粒排列形式 Fig.1 Initial particle arrangement

联立式 (1)、(2) 解得 β =13.12°,代入 (2) 得 b=1.112r。 所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,其中 a=2r, b=1.112r。

2 接触力计算

法向接触力计算模型采用粘弹性并联模型,法 向接触和切向接触力计算类似,在此仅着重介绍法 向力的计算。法向力由两部分组成,一部分是由于 颗粒重叠产生的法向应力 *F*_κ(N/m),另一方面是由 于速度阻尼产生的法向应力 *F*_c(N/m)。有:

$$F_{\rm N} = F_{\rm K} + F_{\rm C} \tag{3}$$

对于二维模型法向力,可以采用 Hertz 接触理 论中两圆柱平行接触的模型计算公式进行计算。将 椭圆形颗粒在点 *J* 处的接触等效为与椭圆盘等面积 等曲率的圆,如图 3 所示,则法向应力 *F* κ 为

$$F_{\rm K} = \frac{\pi b^2}{4} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \left(\frac{1 - u_1^2}{E_1} + \frac{1 - u_2^2}{E_2} \right)^{-1} \tag{4}$$

其中: *R*₁、*R*₂分别表示圆盘的半径和椭圆盘的等效 半径; *b*表示椭圆与圆交点的连线长度的一半; *u*₁、 *E*₁表示圆的泊松比、弹性模量, *u*₂、*E*₂表示椭圆的 泊松比、弹性模量。

在计算圆盘和椭圆盘的重叠量时,等效为计算 虚线椭圆盘和虚线圆盘之间的距离,如图 4 所示,关 键是求得交点 J_1 、 J_2 的坐标。虚线椭圆盘与实线椭圆 盘同圆心,则可设为 $\frac{x^2}{(ak)^2} + \frac{y^2}{(bk)^2} = 1$ (0<k<1),思 路同模型椭圆方程的求解类似,设出交点 J_2 的坐标, 利用交点满足椭圆方程和圆的方程,以及交点处的 椭圆与圆的切线斜率相等,三个方程联立即可求得 交点坐标。同理可求得交点 J_1 的坐标。进而求得重



图 2 椭圆盘颗粒和圆盘颗粒位置图 Fig.2 Elliptical disc particle and disk location map

叠量 δ ,利用 b 与 δ 的几何关系,可求得 b 的值, 进而求出椭圆盘与圆盘由于颗粒重叠产生的法向应 力 $F_{\rm K}$ 。

$$\delta = R_1 - \sqrt{R_1^2 - b^2} + R_2 - \sqrt{R_2^2 - b^2}$$
 (5)

若设圆盘和椭圆盘的质量分别为 M_1 、 M_2 ,法 向阻尼系数 $C_N = 2Z_N \sqrt{K(M_1 + M_2)}$ 。其中, $Z_N = -$

 $\frac{\ln(\text{eps})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\text{eps})}}$, *K*表示法向接触刚度, eps表示 恢复系数。DOTN表示圆盘和椭圆盘的盘心速度



图 3 圆盘和椭圆盘接触示意图 Fig.3 Contact diagram of disc and oval plate



图 4 圆盘和椭圆盘重叠示意图 Fig.4 Overlap diagram of disk and elliptical disk



图 5 动三轴试验的垂直切面示意图 Fig.5 Vertical section of the triaxial test

 V_1 、 V_2 的法向速度差 $V_{2n} - V_{1n}$ 。则 $F_{\rm C} = C_{\rm N} \text{DOTN} = -\frac{21 n (\text{eps})}{\sqrt{\pi^2 + 1n^2 (\text{eps})}} \sqrt{\frac{(M_1 + M_2)}{\delta}} F_{\rm K}$ (6)

以上求解法向力是以椭圆盘和圆盘为研究对象, 关于椭圆盘和椭圆盘、圆盘与圆盘、圆盘或椭圆盘 与边界的法向力计算与之基本一致,且是对它的一 种简化,因为圆盘可看作长轴和短轴相等的椭圆盘, 与四周边界的接触法向力,可以将边界看作弹性模 量无限大、粒径无限大的圆盘。

3 土的动力本构模型

将动三轴绕轴心的垂直切面模型化为长为 L、 高为 h 的矩形模型,如图 5 所示,L、h 均为颗粒直 径的整数倍。矩形模型两侧施加一定围压 p,下边 界固定,上边界施加动位移 s(t)=s0·(1+sin wt)。

颗粒沿着高度方向呈现不均匀分布,每个颗粒 的受力也各有不同,可以采用颗粒体的轴向应力应 变曲线来分析颗粒体受力之后颗粒之间相互作用的 机理。轴向应变易求得,为*s*(*t*)/*h*。由于上下边界所 受切向应力相等,法向应力之间相差的颗粒重力影 响也可以根据颗粒的密度、数目、粒径等计算得出, 因此在进行应力求解时只需要计算下边界所受的力 与*L*的比值。

求出动应力和动应变后,由于动三轴试验利用 土样的 45°斜截面的应力变化代表土层水平面在地 震时的应力状态,这时按照完全均匀土层根据应力 莫尔圆、应变莫尔圆求得 45°土体的动应力、动应变。 这时求得的动应力 - 动应变曲线即是所要求解的骨 干曲线。

关于下底板受到的应力,假定总时间步长是确 定的,设为T,时间步数为N,则每个时间步长为T/N。 为了防止颗粒在受到法向力重叠时重叠量过大,以 及保证两颗粒在达到一定重叠量时(重叠量最大时, 两颗粒由于重叠受到的反向力最大),颗粒速度为零, 加速度最大,使得两颗粒弹开。T/N 的取值是有要 求的,并且是可以求解的。时间步长是指在进行离 散元模拟时对离散单元体进行两次迭代计算所间隔 的时间,即每相邻两个时间步的时间间隔。离散元 法通常采用瑞利(Rayleigh)时间的百分比来标定所 使用时间步长的具体大小。瑞利(Rayleigh)时间是 瑞利剪切波在离散单元体表面传播的时间,当一次 模拟用到不同大小的单元体时,取最小直径的离散 单元体作为计算依据。瑞利 (Rayleigh) 时间的具体 计算公式如:

$$\frac{T}{N} = \frac{\pi R}{0.163u + 0.876.6} \cdot \sqrt{\frac{\rho(1+u)}{2E}}$$
(7)

其中ρ表示圆盘颗粒的面密度,椭圆盘和圆盘面密 度相同, *R* 为圆盘颗粒的半径。

位移施加的频率为 w, 周期, $T' = 2\pi/w$ 在预先 设 T 时,应使得 T 是 T'的 n 倍 (其中 n 为整数)。 则每个时间步长为 $2n\pi/Nw$,显然第 *i* 个时间步对应 的时间 t (*i*) = $\frac{n}{N} \frac{2\pi}{w}_i$ 。根据时间步长,可以确定到

达第*i*个时间步所需要的时间,这时颗粒具有确定 的边界条件,即上下边界的位移边界条件,上边界 的速度、加速度边界条件,其中v=s'=sowcoswt, $a=s''=v'=-sow^2sinwt$,以及左右边界的围压边界条件。 通过对每个颗粒循环计算,可求得与下边界接触圆 盘或者椭圆盘的重叠量 δ_i 、 b_i 和法向速度差,进而 根据式(3)、(4)、(6)可以求得每个颗粒在法向所受 到的颗粒的合力。将所有与底板接触的颗粒在与底 板垂直方向的投影进行求和,即可得到底板所受到 的合力 $F_{N, \pm}$,据此可以得到在第*i*时间步的底部应 力 $\sigma_i = \frac{F_{N, \pm}}{L}$,这时的颗粒整体应变

$$\varepsilon_i = \frac{s(t)}{L} = \frac{s_0(1 + \sin wt)}{L} = \frac{s_0}{L} \left(1 + \sin\left(\frac{n}{N} 2\pi i\right) \right)$$
(8)

其中 σ_i 和 ε_i 都是时间步数i的函数。

对时间步 *i* 进行循环计算,可求得,经历时间 *T*后,整体颗粒的应力和应变。当上部边界向下压时, 颗粒发生重叠,每个颗粒都由于重叠受到不同方向 的反向力。当上部边界向上运动时,随着顶部颗粒 的重叠量的释放,受到的上部边界的力减小,与之 对应的加速度也随之减小。所有颗粒都会发生不同 程度的重叠量的释放,和重新建立的重叠量平衡, 这个过程相当于土工实验中的卸载,所有颗粒会随 着上部边界的上移而不同程度的上移,颗粒上移的 力正是由于颗粒重叠产生的反力。

骨干曲线是指受同一固结压力的土,在不同动 应力作用下每一周应力应变关系曲线滞回圈顶点的 连线。通过变化的取值,可得到不同峰值位移情况 下的 σ₄ – ε₄ 曲线,由 σ₄ – ε₄ 曲线的滞回圈顶点相连 便可以得到"骨干曲线"。而土体固结是指在荷载 作用下,土体内部含水缓慢地渗出,体积逐渐减小, 在土体自重作用下沉降趋于稳定的一种现象。本模 型通过合力选取颗粒之间的接触关系,来近似模拟 有水情况时的颗粒之间的作用,并在围压作用下使 得颗粒体体积发生压缩。通过对"骨干曲线"的非 线性模拟,就可以近似得到在本情况下的土的动力 本构模型。

4 结论

通过构造二维离散元模型,分析了土体在动荷载作用下的运动情况,并对时间步进行了分析,提出了二维离散元模拟的一种基本思路。利用 Hertz 接触理论,对颗粒之间的接触关系进行了分析,并 通过和动三轴实验的对比,得到 *o*_d – *ɛ*_d 表示的"骨 干曲线"。

参考文献

- [1] 刘汉龙. 土动力学与土工抗震研究进展综述 [J]. 土木工 程学报, 2012, 45(4): 148-164.
- [2] 孙其诚, 王光谦. 颗粒物质力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [3]LI Xikui, CHU Xihua.A discrete particle model and numerical modeling of the failure modes of granular materials[J].International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, 2005, 22(8): 894-920.
- [4]CAMPBELL C.Granular shear flows at the elastic limit.[J] Journal of Fluid Mechanics, 2002, 465: 261-291.
- [5]JI Shunying, DANIEL M H, Hayley H S.Comparisons of physical experiment and discrete element simulations of sheared granular materials in an annular shear cell[J]. Mechanics of Materials, 2009, 41: 764-776.
- [6]BABIC M, SHEN H H, SHEN H T.The stress tensor in granular shear flows of uniform, deformable disks at high solids concentrations[J].Journal of Fluid Mechanics, 1990, 219(10): 81-118.
- [7]BATHURST R J, ROTHENBURG L.Micromechanical aspects of isotropic granular assemblies with linear contact interactions.J.Appl.Mech.Am.Soc.Mech.Engrs., 1988, 55: 17-23.
- [8] 宋 鹗. 基于椭圆颗粒模型的离散元法基本理论及算法 研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2008.
- [9] 史旦达,周健,刘文白,等.砂土直剪力学性状的 非圆颗粒模拟与宏细观机理研究[J].岩土工程学报, 2010(10), 32(10): 1557-1565.
- [10] 周健,孔祥利,鞠庆海,等.土工合成材料与土界

面的细观研究 [J]. 岩石力学与工程学报,2007(Z1): 3196-3202.

- [11] 马宗源,徐清清,党发宁.碎石土地基动力夯实的颗 粒流离散元数值分析[J].工程力学,2013,30(Z1): 184-190.
- [12] 王皆伟,王汝恒.土动力本构模型初探 [J].四川建筑 科学研究,2005,31(5):84-89.
- [13]JI Shunying, HAYLEY H S.Effect of contact force models on granular flow dynamics[J].Journal of engineering mechanics-asce, 2006, 132(11): 1252-

1259.

- [14] 关正美,石伟强.动三轴试验研究土的动剪切模量和 阻尼比 [J]. 山西建筑,2005,31(20):91-92.
- [15] 廖红建,李涛,马宗源,等,黄土骨干曲线模型比较 分析 [J]. 岩土力学, 2009, 30(Z2): 17-21.
- [16] 张永兴,丁玉琴,陈建功.基于双曲正切函数的土动 力非线性本构模型[J].地震工程与工程振动,2010, 30(4): 166-171.

(责任编辑 王利君)

- (上接第 34 页)滑坡离心模型试验研究 [J]. 岩土力学, 2018(2): 1-9.
- [3] 徐文杰,王立朝,胡瑞林.库水位升降作用下大型土 石混合体边坡流-固耦合特性及其稳定性分析[J].岩 石力学与工程学报,2009(7):1491-1498.
- [4] 罗红明,唐辉明,章广成等.库水位涨落对库岸滑坡
 稳定性的影响[J].地球科学(中国地质大学学报),
 2008(5):687-692.
- [5] 王力,王世梅,杨贝贝.库水位变动条件下土-水特 征曲线对滑坡稳定性计算结果的影响研究[J].三峡大 学学报:自然科学版,2012(3): 10-14.
- [6] 卢博,郭永成,赵二平,等.库水位变化和降雨条件

(上接第38页)计算结果验证了一期加固工程的失 稳现象出现的原因。通过采用水泥搅拌桩加固方案, 在不同置换率情况下,合理地改变加固范围可以使 边坡安全稳定系数达到规范标准。

参考文献:

- [1] 杜春梅,李守德,柯倩雯,等.水泥土连拱抗滑墙加 固软基边坡机理研究[J].科学技术与工程,2016(26): 257-263.
- [2] 孙明霞,张念,肖建峰,等.水泥土搅拌桩在某堤防 滑坡处理中的应用[J].人民黄河,2016(01):120-121.
- [3] 李守德,柯倩雯,王恒,等.水泥土搅拌桩连拱抗滑 墙加固软土地基边坡模型试验及数值分析[J].科学技

下边坡渗流特性及稳定性分析 [J]. 三峡大学学报: 自然科学版, 2017(2): 54-59.

- [7] 葛修润.抗滑稳定分析新方法——矢量和分析法的基本原理及其应用[C]//第十一次全国岩石力学与工程学术大会论文集.武汉:湖北科学技术出版社,2010: 26-44.
- [8] 薛翊国. 锦屏一级水电站左岸渗流模型分析与高边坡 稳定性评价 [D]. 长春:吉林大学, 2006.
- [9]周钟,巩满福,雷承第.锦屏一级水电站左坝肩边 坡稳定性研究[J].岩石力学与工程学报,2006(11): 2298-2304.

(责任编辑 王利君)

术与工程, 2014(35): 281-285.

- [4] 刘建华,胡晓东.水泥深层搅拌桩在高速公路软基处 理中的应用[J].湖南交通科技,2003(1):17-18.
- [5] 郭连营,戚蓝.粉喷桩处理海河堤岸滑坡应用实例分析[J].海河水利,2004(6):46-48.
- [6] 顾长存,刘胜松.堤防水泥土搅拌桩复合地基稳定分析及应用研究[J].防灾减灾工程学报,2005(3):330-334.
- [7] 陈 东,何开胜.港口堆场的失稳滑动原因和治理方案 设计 [J].水运工程,2005(10):31-33.
- [8] 吕春峰. 航道驳岸软基处理深搅桩施工质量抽检评定 方法的实践[J]. 水运工程, 2008(8): 153-157.

(责任编辑 王利君)