

文章编号: 1673-9469 (2019) 02-0033-05

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2019.02.008

基于计算均匀化的夹杂颗粒复合材料参数研究

殷达¹, 孟庆祥^{1, 2}

(1. 河海大学岩土工程科学研究所, 江苏南京 210098; 2. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏南京 210098)

摘要: 夹杂颗粒复合材料分布形态各异, 为确定其力学参数, 基于计算均匀化方法, 结合随机周期复合材料模型生成算法, 提出了一种由表征单元体计算夹杂颗粒复合材料弹性模量的方法, 研究了夹杂颗粒分布形态、尺寸和含量对复合材料力学参数的影响。复合材料在颗粒随机分布时表现为各向同性, 在颗粒沿一定方向分布时表现为各向异性; 复合材料力学参数随单元体尺寸增大逐渐稳定; 弹性模量随颗粒含量增加而增大, 泊松比随颗粒含量增加而减小。结果表明计算均匀化是研究复合材料力学参数的有效方法。

关键词: 计算均匀化, 周期边界条件, 复合材料, 参数分析

中图分类号: TB33

文献标识码: A

Computational Homogenization-based Parameter Analysis on Composites Material with Inclusion Particles

YIN Da¹, MENG Qingxiang^{1, 2}

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China;
2. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

Abstract: The mechanical parameters of composite materials with inclusion particles are important in engineering. Based on the computational homogenization method and the random periodic composite material model generation algorithm, a method was proposed to calculate the elastic modulus of the composite material with inclusion particles from representative elementary volume, and the influence of the distribution, size and content of the inclusion particles on the mechanical parameters of the composite material was studied. The composites show isotropy when the particles are randomly distributed and anisotropy when the particles are distributed along a certain direction. The mechanical parameters of composites become stable with the increase of element size. The elastic modulus increases with the increase of particle content, and poisson's ratio decreases with the increase of particle content. The results show that the calculation of homogenization is an effective method to study the mechanical parameters of composite materials.

Key words: calculating homogenization, periodic boundary condition, composite material, parameter analysis

包含颗粒的复合材料因其良好的性能而被广泛应用于各个领域。相对于直接开展材料试验, 数值模拟方法可以更高效的研究复合材料的力学性能。考虑到复合材料的微观结构具有良好的周期性, 可以采用表征单元体 (representative elementary

volume, REV) 来研究整个复合材料的结构性能^[1]。然而, 一方面使用多尺度分析方法需要较强的理论基础和推导复杂公式的能力, 另一方面该模型只适合应用于具有规则微观结构的非均质材料, 很难应用于结构复杂的复合材料。

收稿日期: 2018-11-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (51709089)

作者简介: 殷达 (1994-), 男, 江苏常州人, 硕士研究生, 从事岩石卸荷损伤及数值计算方面的研究。

计算均匀化理论可以有效处理具有复杂结构的复合材料力学性能分析问题。本文在计算均匀化理论的基础上,建立了具有周期性边界条件的包含粒子的二维复合材料,得到了复合材料的力学特性和基本力学参数,讨论了颗粒含量对复合材料尺寸效应和弹性参数的影响。

1 计算均匀化的数值实现

1.1 周期性边界条件

对于具有规则周期性的非均匀材料,假设表示这些介质的物理参数的函数(几何或其他特性)具有以下性质:

$$F(x + NY) = F(x) \quad (1)$$

式中, $x=(x_1, x_2, x_3)$ 是一个任意点的位置向量, N 是一个 3×3 对角矩阵 $\text{diag}[n_1, n_2, n_3]$; $Y=(Y_1, Y_2, Y_3)^T$ 是一个决定微结构周期的常向量。为了有效地设置周期边界条件,通常需要基本单元模型来确保单元模型与网格节点一一并行。换句话说,基本单元格需要进行周期性网格划分。对于基元周期细观结构的材料,周期位移场的一般表达式为:

$$u_i = \bar{\epsilon}_{ik} x_k + u_i^* \quad (2)$$

式中, $\bar{\epsilon}_{ik}$ 为表征体的平均应变, u_i^* 是周期性位移修正。

显然,上面的方程满足变形和协调的条件。然而,由于 u_i^* 一般未知且取决于全局荷载,很难直接将周期性位移场直接应用到基于周期基本单元模型的有限元分析中。在复合结构分析中,单细胞模型的边界曲面多为平行或成对的。在一对边界面上,周期位移场可表示为:

$$u_i^{j+} = \bar{\epsilon}_{ik} x_k^{j+} + u_i^* \quad (3)$$

$$u_i^{j-} = \bar{\epsilon}_{ik} x_k^{j-} + u_i^* \quad (4)$$

考虑到 u_i^* 是恒定的相反的平行表面周期性的基础细胞,式(3)-式(4),可以得到:

$$u_i^{j+} - u_i^{j-} = \bar{\epsilon}_{ik} (x_k^{j+} - x_k^{j-}) = \bar{\epsilon}_{ik} \Delta x_k^j \quad (5)$$

Δx_k^j 在基本单元上是每一组平行的相对表面的常数。一旦 $\bar{\epsilon}_{ik}$ 给定,式(5)右侧的位移差将变为一个常数,即:

$$u_i^{j+}(x, y, z) - u_i^{j-}(x, y, z) = \bar{\epsilon}_{ik} \Delta x_k^j (i, j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

此外, Xia^[2] 等人严格证明,如果采用式(4)中的周期位移边界条件,相邻基元的边界可以满足应力的连续性条件。基于式(6),将周期边界问题转化为多点约束(MPC)方程,用于有限元分析。

1.2 施加周期性边界条件

本文基于周期边界条件的基本理论,结合常用有限元分析程序,描述了复合材料周期边界条件的应用策略。对于图1所示的简化模型,设置周期边界的整个过程如下:

(1) 根据模型建立一组边界节点。对于二维模型(假设为边长为 L 的正方形),只需要构建4个节点集(分别为上边界、下边界、左边界和右边界)和4个顶点。为了便于应用周期边界,需要假设一个虚拟节点,并假设节点数为111111。

(2) 基于周期边界条件的确定约束条件。假设应用周期性边界条件($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$),以节点1为一个参考点,约束方程可以写成:

面约束:

$$u_{Right} - u_{Left} = L\epsilon_x; v_{Right} - v_{Left} = 0 \quad (7)$$

$$u_{Up} - u_{Down} = L\gamma_{xy}; v_{Up} - v_{Down} = L\epsilon_y \quad (8)$$

角点约束:

$$u_2 - u_1 = L\epsilon_x; v_2 - v_1 = 0 \quad (9)$$

$$u_3 - u_1 = L\gamma_{xy}; v_3 - v_1 = L\epsilon_y \quad (10)$$

$$u_4 - u_1 = L(\gamma_{xy} + \epsilon_x); v_4 - v_1 = L\epsilon_y \quad (11)$$

(3) 基于约束的方法建立多点约束方程。对于多点问题, Abaqus 可以通过关键字“Equation”来求解,基本单元应变由虚拟节点的位移来执行。约束可以通过循环所有需要施加约束的节点来建立。

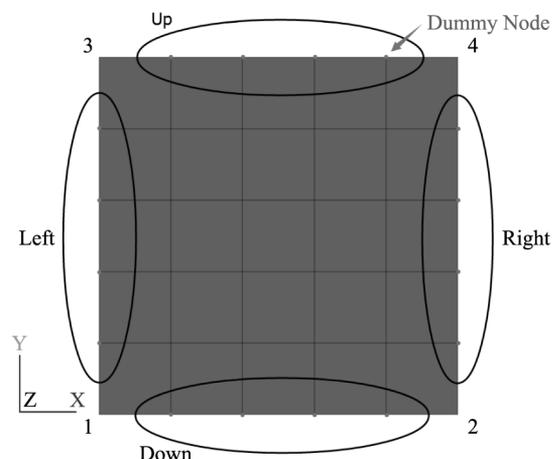


图1 简化模型及其周期性边界

Fig.1 The simplified model and its periodic boundary

2 含颗粒的复合材料建模及参数研究

2.1 模型建立

复合材料的结构通常是周期性的,可以将其看作是一个基本单元的平移变换^[3]。假设给出粒子体

积分数和粒子数量 n ，模型生成过程如下：

(1) 假设域生成模型是一个平方域 (侧边长为 L)，粒子半径 r 可表示为：

$$r = \sqrt{\frac{L^2 f}{n\pi}} \quad (12)$$

(2) 在边长 $L+r$ 的正方形域中随机生成颗粒中心，判断粒子是否与已有粒子接触。如果存在接触撤销该颗粒中心，并随机产生新的中心。

(3) 当一个颗粒中心生成后，需要判断颗粒是否完全在域内。如果完全在内部，颗粒就会生成。否则，返回第 (2) 步。

(4) 重复此过程，直到颗粒数量满足要求。

2.2 计算弹性模量

为了确定含有颗粒的复合材料的弹性模量，假设复合材料是各向异性的。基于复合材料力学，应力和应变可以表示为：

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -V_{21}/E_2 & 0 \\ -V_{12}/E_1 & 1/E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中， $V_{12}=V_{21}E_1/E_2$ 。

由上式的倒数可以得到应力与应变的关系：

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中， $C_{11} = E_1^2 / (E_1 - E_2 V_{12}^2)$ ， $C_{12} = E_1 E_2 V_{12} / (E_1 - E_2 V_{12}^2)$ ， $C_{22} = E_1 E_2 / (E_1 - E_2 V_{12}^2)$ ， $C_{33} = G_{12}$ 。

表征体的平均应变为周期边界施加的应变，可以通过对每个基元的应力进行平均得到：

$$\sum_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dv \quad (15)$$

在周期应变作用下，可用基元的平均应力计算柔度矩阵，第一列的柔度矩阵可以表示为：

$$C_{11} = \frac{\sum \epsilon_{11}}{\epsilon_{11}}; \quad C_{12} = \frac{\sum \epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \quad (16)$$

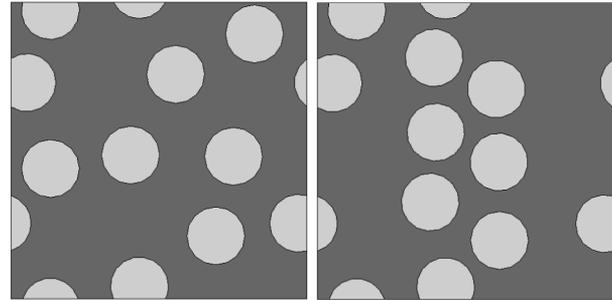
柔度矩阵的其他列可以通过向另一个方向施加基元应变得到。根据柔度矩阵的组成，可以得到含有夹杂颗粒的复合材料的弹性模量：

$$E_1 = C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}; \quad E_2 = C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}}; \quad V_{12} = \frac{C_{12}}{C_{22}}; \quad G_{12} = C_{33} \quad (17)$$

结合 1.2 节含粒子复合材料基元周期边界分析结果及相关计算公式，使用基于 Abaqus 的 Python 脚本语言编写了一系列关于建模计算及后处理的程序。

2.3 参数讨论

2.3.1 颗粒分布对材料参数的影响



(a) 随机均匀分布 (b) 带指向的分布

图 2 具有不同颗粒分布形态的复合模型

Fig.2 Composite model with different kinds of inclusion particles distribution

颗粒分布特性对材料性能有一定的影响。为了研究颗粒分布对复合材料性能的影响，调整随机生成的模型如图 2(a)，使某些颗粒沿一定方向排列，如图 2(b) 所示。采用上述弹性参数计算方法进行周期分析和参数分析，计算结果如表 1 所示。根据表 1 所示的不同分布的复合材料弹性参数，当夹杂颗粒随机分布时，不同方向的弹性模量差异较小。因此，在简化分析中，复合材料可视为各向同性材料。另一方面，当包裹体颗粒按一定规律分布时，复合材料在不同方向上的弹性模量差异更明显，复合材料呈现各向异性^[4-6]。

表 1 不同分布下复合材料的弹性参数

Tab.1 Elastic parameters of composite material in different distribution

分布形式	E_1/MPa	E_2/MPa	V_{12}	G_{12}/MPa
随机分布	100.93	100.84	0.28	39.48
倾向分布	100.74	102.57	0.27	39.12

2.3.2 复合材料的尺寸效应

合理确定复合材料的力学参数一直是复合材料分析的重要组成部分。与均质材料不同，复合材料具有明显的尺寸效应，尺寸效应是影响复合材料性能的主要因素。为了研究尺寸效应的影响，生成了不同尺寸的复合材料模型 (粒径 0.1 m，颗粒含量 30%)，如图 3 所示。

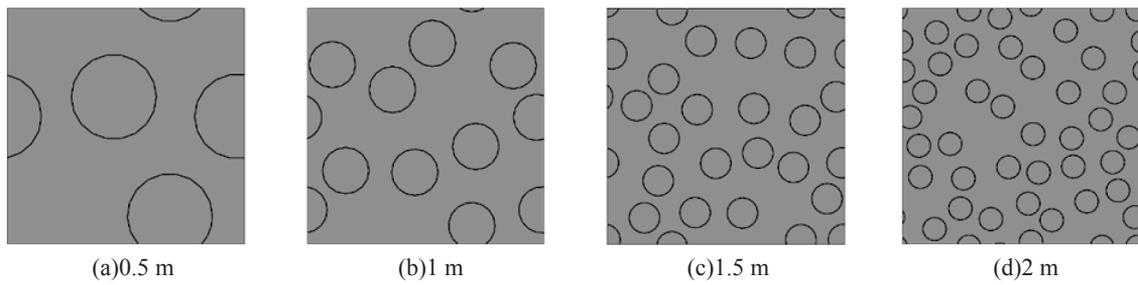


图3 不同尺寸下的含颗粒复合材料

Fig.3 Different size models of composite material with inclusion particles

由图4可以看出,当复合模型较小时,计算得到的弹性模量 E_1 是离散的;随着尺寸的增大,弹性模量样本均值的波动最终逐渐趋于稳定,各组的方差逐渐减小。通过均值方差检验可推定复合材料的表征单元体尺寸为 1.5 m。

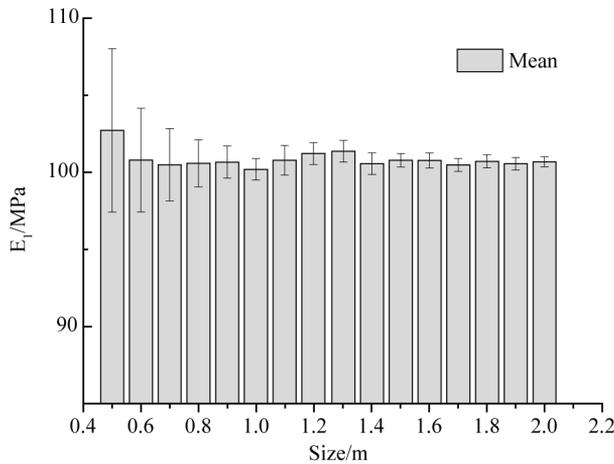


图4 含颗粒复合材料的尺寸效应

Fig.4 Size effect of composite material with inclusion particles

2.3.3 颗粒含量的影响

复合材料中夹杂颗粒的含量是影响复合材料力学性能的重要因素。基于复合材料生成算法,在表征单元体尺度 (1.5 m) 中生成了—系列不同颗粒含量的复合材料,如图5所示。

根据不同颗粒含量的复合材料模型,计算了复

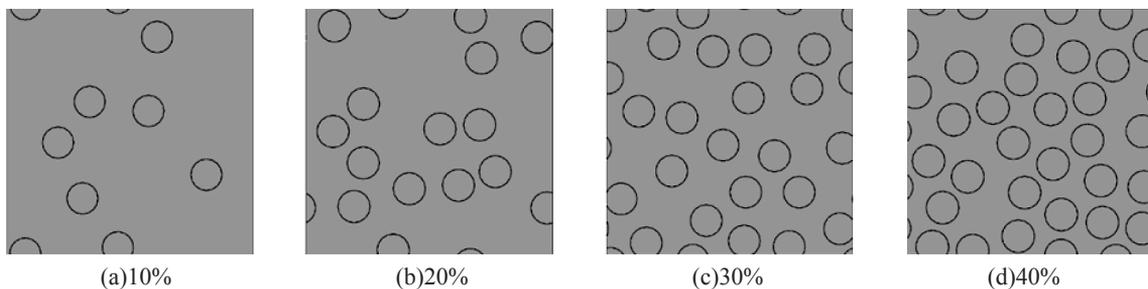


图5 不同颗粒含量下的复合材料模型

Fig.5 Composite material models with different particle content

合材料的弹性参数,如图6所示。从图中可以看出,材料弹性模量随颗粒含量的增加呈线性增加,泊松比呈线性下降。

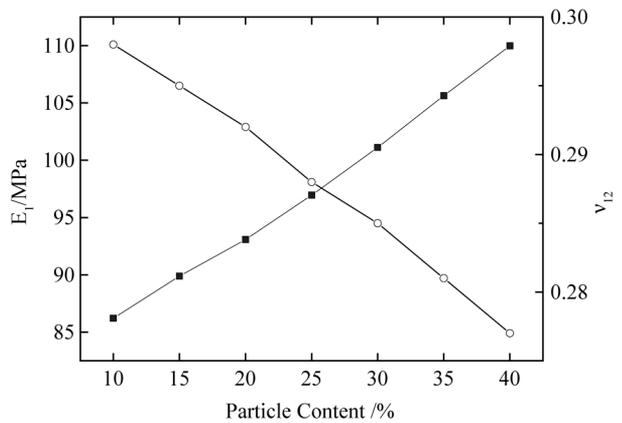


图6 复合材料力学参数与颗粒含量的关系

Fig.6 Relationship between elastic modulus (and Poisson's ratio) of composite material and inclusion particle content

3 结论

1) 颗粒的分布特性对复合材料的力学性能有一定的影响。当颗粒随机分布时,复合材料可视为横观各向同性材料;当颗粒以一定方向分布时,复合材料可视为各向异性材料。

2) 复合材料具有明显的尺寸效应,随着尺寸的增大,材料性能逐渐稳定。

3) 随着颗粒含量的增加, 材料的弹性模量线性增大, 泊松比线性减小。

参考文献:

- [1] PENG Bo, YU Wenbin. A micromechanics theory for homogenization and dehomogenization of aperiodic heterogeneous materials[J]. *Composite Structures*, 2018, 199: 53-62.
- [2] XIA Z H, ZHANG Y F, ELLYIN F, A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. *International Journal of Solids and Structures*[J]. 2003, 40(8): 1907-1921.
- [3] AL-OSTAZ A, ANIPINDI D, KHALID I A. Statistical model for characterizing random microstructure of inclusion-matrix composites. *Journal of Materials*

Science[J]. 2007, 42(16): 7016-7030.

- [4] MENG Q X, WANG H L, XU W Y et al, A numerical homogenization study of the elastic property of a soil-rock mixture using random mesostructure generation[J]. *Computers&Geotechnics*. 2018, 98(6): 48-57.
- [5] MASMOUDI M, KADDOURI W, KANIT T et al. Modeling of the effect of the void shape on effective ultimate tensile strength of porous materials; numerical homogenization versus experimental results[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017, 130: 497-507.
- [6] 葛超, 董永香, 宋卿. 基于 Al/PTFE 真实细观特性统计模型的宏观力学性能模拟 [J]. *复合材料学报*. 2016, 33(11): 2528-2536.

(责任编辑 李新)

(上接第4页) 细颗粒含量的增加而减小。

3) 随着细颗粒含量的增大, 由于管涌后的土体内部结构发生改变, 土体峰值强度呈不规则变化。在三轴剪切状态下管涌后土体体积先发生剪缩后再发生剪胀, 试样体积最大剪缩量随细颗粒含量的增大而增大。

参考文献:

- [1] 常东升, 张利民. 土体渗透稳定性判定准则 [J]. *岩土力学*, 2011(增刊1): 253-259.
- [2] 陈亮, 雷文, 张红宇, 等. 非稳定流作用下管涌发生发展的室内试验及理论分析 [J]. *岩土工程学报*, 2013, 35(4): 655-662.
- [3] 姚志雄, 周健, 张刚, 等. 颗粒级配对管涌发展的影响试验研究 [J]. *水利学报*, 2016, 47(2): 200-208.
- [4] 梁越, 陈亮, 陈建生. 考虑流固耦合作用的管涌发展数学模型研究 [J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(8): 1265-1270.
- [5] 罗玉龙, 吴强, 詹美礼, 等. 渗流-侵蚀-应力耦合管涌试验装置的研制及初步应用 [J]. *岩土力学与工程学报*, 2013, 32(10): 2108-2114.
- [6] 罗玉龙, 速宝玉, 盛金昌, 等. 对管涌机理的新认识 [J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(12): 1895-1902.
- [7] CHANG D S, ZHANG L M. A Stress-controlled erosion apparatus for studying internal erosion in soils[J]. *Geotechnical Testing Journal*, 2011, 34(6): 1-11.

- [8] CHANG D S, ZHANG L M, XU T H. Laboratory investigation of initiation and development of internal erosion in soils under complex stress states[J]. *ICSE6 Paris*, 2012, 1(1): 895-902.
- [9] CHEN C, ZHANG L M, CHANG D S. Stress-strain behavior of granular soils subjected to internal erosion[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2016, 142(12): 1-6.
- [10] LIN K, AKIHIRO T. Triaxial erosion test for evaluation of mechanical consequences of internal erosion[J]. *Geotechnical Testing Journal*, 2014, 37(2): 1-18.
- [11] OUYANG M, AKIHIRO T. Influence of initial fines content on fabric of soils subjected to internal erosion[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2016, 53(2): 299-313.
- [12] 吴梦喜, 叶发明, 张琦. 细颗粒流失对砂砾石土本构关系的影响研究 [J]. *岩土力学*, 2017, 38(6): 1550-1556.
- [13] 何健健. 无粘性土管涌力学性质研究 [D]. 南京: 河海大学, 2018.
- [14] KENNEY T C, LAU D. Internal stability of granular filters[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1985, 22: 215-225.
- [15] LADD R S. Preparing test specimens using undercompaction[J]. *Geotechnical Testing Journal*, 1978, 1(1): 8.

(责任编辑 李新)