

文章编号: 1673-9469(2019)04-0045-06

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2019.04.008

基于数值积分的橡胶坝坝袋曲线计算与绘图程序研究

简新平^{1,2}

(1. 又石大学 大学院, 韩国 全州; 2. 河北工程大学 水利水电学院, 河北 邯郸 056038)

摘要: 针对橡胶坝坝袋曲线的计算效率低、精度有限等问题, 基于数值积分, 应用梯形法、龙贝格算法求解第一、第二类椭圆积分并用于橡胶坝的坝袋计算。两种方法用来求解椭圆积分, 在一定的内外压比和等分数等条件下, 计算不完全椭圆积分, 可以达到非常高的精度。通过 AutoCAD Automation 技术实现了坝袋曲线的自动绘制。计算结果给出了比相关规范更加精确的坝袋曲线。因此, 数值积分为橡胶坝技术研究提供了更加准确的数值模型。

关键词: 橡胶坝; 坝袋曲线计算; 数值积分; 自动绘图

中图分类号: TV664

文献标识码: A

Research on Programing for Calculation and Drawing of Rubber Dam Bag Curve Based on Numerical Integration

JIAN Xinping^{1, 2}

(1. Graduate School, Woosuk University, Jeonju, Korea; 2. School of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Hebei University of Engineering, Handan, Hebei 056038, China)

Abstract: The calculation of rubber dam bag is low in efficiency and limited in precision. For the limitation and shortage, this paper puts forward the calculation method of the rubber dam bag based on numerical integration, and uses two numerical integration methods to solve the first and second types of elliptic integral and apply them to the calculation of rubber dam bag. The two methods have achieved high precision. The program compiled by the algorithm can calculate the parameters and coordinates of dam bags accurately and quickly, and automatic drawing of rubber dam bag curve is realized by AutoCAD Automation technology. The research provides effective technical support for the technical research and comparison of rubber dam.

Key words: rubber dam; calculation of the dam bag curve; numerical integration; automatic drawing

橡胶坝以其造价低、工期短以及跨度大等优点, 广泛应用于园林景观、城市水利、防洪治河、航运、供水、生态环境改善等工程中。橡胶坝工程能否充分发挥效益, 与规划、设计等因素密切相关, 不合理的设计将给工程带来不利的影响。因此, 诸多研究人员在不断地进行橡胶坝技术研究^[1-8]。相关规范也规定, 橡胶坝的布置、坝袋的充坝介质以及坝袋的内、外压比值等, 应经技术经济比较后确定^[9]。然而, 橡胶坝坝袋的计算涉及第一、第二类椭圆积

分。这类积分目前尚无解析解, 一般以查表或近似计算公式来求解, 其精度受到限制。相关规范给出的查表法只能计算特定的坐标点, 不能为坝袋应力有限元计算^[6-7]、坝袋振动分析^[8]等研究提供更精准的几何模型。此外, 查表法还有效率低、易出错、不利于绘图等缺点, 橡胶坝的经济和技术比较, 需要各种坝袋设计方案, 而查表法不能迅速生成。显然, 随着技术的进步, 查表法已经不能满足橡胶坝技术研究、方案比较等设计任务的更高要求。

收稿日期: 2019-09-06

基金项目: 水利部公益性行业专项经费资助项目(201401030); 邯郸市科学技术研究与发展计划项目(1621211039-2); 河北省水资源高效利用工程技术研究中心项目(18965307H)

作者简介: 简新平(1978-), 男, 江西新余人, 博士研究生, 副教授, 主要从事造景土木、水利工程数值模拟研究。

基于上述情况,本文提出了基于数值积分的橡胶坝坝袋计算方法,应用两种数值积分方法求解第一、第二类椭圆积分,并用于橡胶坝的坝袋计算。同时,本文给出了橡胶坝坝袋计算的程序流程图,编写了相应的程序,不但克服了查表法的缺点,实现了坝袋参数和坐标的自动、准确计算,还通过 AutoCAD Automation 技术实现了坝袋曲线的自动绘制。

1 橡胶坝坝袋计算的内容

橡胶坝坝袋分为充水式与充气式两种类型,如图 1 所示,计算内容包括:坝袋径向拉力、坝袋环向各部分尺寸、坝袋单宽容积、坝袋堵头轮廓坐标^[9]。计算工况为上游水深等于坝高,下游无水的情况。限于篇幅,本文主要以充水式坝袋为例。

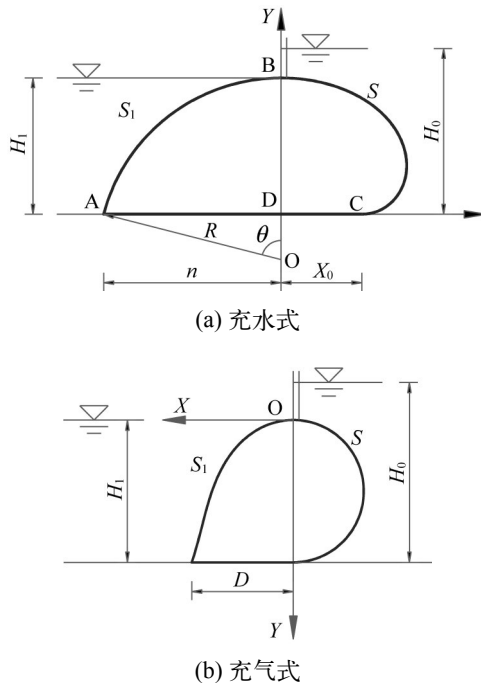


图 1 橡胶坝坝袋的类型

Fig.1 Types of rubber dam bags

坝袋径向计算强度:

$$T = \frac{1}{2} \gamma \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) H_1^2 \quad (1)$$

式中, T 为坝袋径向计算强度, γ 为水的容重, 坝袋内、外压比 $\alpha = \frac{H_0}{H_1}$, H_0 为坝袋内水压力, H_1 为设计坝高。

上游坝面曲线段长度 S_1 、下游坝面曲线段长度 S 分别按下列公式计算:

$$S_1 = R\theta \quad (2)$$

$$S = \left(1 - \frac{1}{2\alpha} \right) H_1 F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

其中, 当 $\alpha \leq 1.5$ 时, $\theta = \sin^{-1} \frac{n}{R}$; 当 $\alpha > 1.5$ 时, $\theta = \pi - \sin^{-1} \frac{n}{R}$ 。 k 由 α 计算, $k^2 = \frac{2\alpha - 1}{\alpha^2}$ 。上游坝面

曲线段半径 R 可按下列公式计算:

$$R = \frac{2\alpha - 1}{4(\alpha - 1)} H_1 \quad (4)$$

$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 分别为第一、第二类完全椭圆积分。

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (5)$$

$$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (6)$$

坝袋横断面曲线坐标按下列公式计算:

上游坝面曲线段坐标

$$X = -\sqrt{Y^2 + 2R(R - H_1) - 2RH_1 + H_1^2} \quad (7)$$

下游坝面曲线段坐标

$$X = X_0 - \left(\alpha - 1 + \frac{1}{2\alpha} \right) H_1 F(k, \varphi_1) + \alpha H_1 E(k, \varphi_1) \quad (8)$$

其中, $F(k, \varphi_1)$, $E(k, \varphi_1)$ 分别为第一、第二类不完全椭圆积分。

$$F(k, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (9)$$

$$E(k, \varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (10)$$

$$\varphi_1 = \sin^{-1} \sqrt{\frac{2\alpha \frac{Y}{H_1} - \frac{Y^2}{H_1^2}}{2\alpha - 1}} \quad (11)$$

式(9)、(10)表示第一、第二类不完全椭圆积分,式(5)、(6)表示第一、第二类完全椭圆积分,是坝袋曲线计算的关键。但它们的值不能用初等函数来表示,常用的计算方法有二项式展开法、兰登变换法、高斯算术-几何平均数法和卡尔松方法等。椭圆积分表利用二项式展开法计算得到,文献[10]给出了完全和不完全椭圆积分表,但只有有限的一些积分值,对于表中没有列出的值,通过内插计算则得不到准确值^[11]。二项式展开法需要展开至高次项才能达到理想的精度,十分繁琐,不利于编程实现,而 Matlab 等数学软件采用高斯算术-几何平均数法、卡尔松方法等方法,需要降低计算精度才能提高计算

速度^[12]，并且，如果调用 Matlab 等软件，将不利于橡胶坝坝袋计算程序的独立性、实用性，也不易实现 AutoCAD 图的自动绘制。

为实现简单而有效的椭圆积分计算，本文尝试用梯形法、龙贝格算法两种数值积分算法分别计算椭圆积分，并应用于实用的坝袋计算和绘图程序。数值试验结果表明，两种数值积分算法都能达到足够的精度，坝袋计算结果与规范吻合，且程序能提供多于规范给出的任意数量的坝袋曲线坐标点。

2 第一、第二类椭圆积分的数值求解

数值积分是求解原函数积分问题的有效方法，近年来在闸室底板结构动力响应分析^[13]、边坡可靠性分析^[14]等方面都有具体应用。数值积分的方法有梯形法、辛甫生法、柯特斯法、龙贝格算法等^[15]。本文采用梯形法、龙贝格算法分别计算椭圆积分，比较、验证计算结果。梯形法算法简单实用，利于编程，但精度较其它算法低，而通过提高积分区间的分段数量可以控制精度，重点要研究并给出满足坝袋计算精度所需要的分段数量。龙贝格算法是变步长加速算法，以梯形法为基础，收敛速度快，精度高，但算法相对复杂，重点要研究这一算法在椭圆积分计算中的实现。

2.1 梯形法数值积分

对于积分 $I = \int_a^b f(x)dx$ ，将积分区间分为 n 等分， h 为每一等分的长度， $x_k = a + kh$ ，梯形法数值积分公式为

$$T_n = \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)] \quad (12)$$

将等分数 n 加倍，则梯形法的误差减至原有误差的 $1/4$ ^[15]。

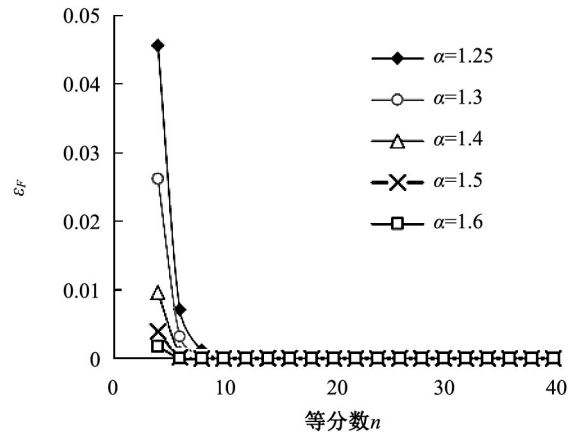
对第一、二类完全椭圆积分 $F(k, \frac{\pi}{2})$ 和 $E(k, \frac{\pi}{2})$ ，其积分区间的范围大于不完全椭圆积分的积分区间范围。因此，研究数值积分的精度时，只需要研究完全椭圆积分计算的精度。规范规定，充水式橡胶坝内、外压比 α 值宜选用 1.25 ~ 1.60。取 $\alpha=1.25$ 、1.3、1.4、1.5、1.6，分别用不同的等分数 n ，按 (12) 式计算 $F(k, \frac{\pi}{2})$ 和 $E(k, \frac{\pi}{2})$ ，并用下式计算收敛误差。

$$\epsilon = |T_{n+1} - T_n| \quad (13)$$

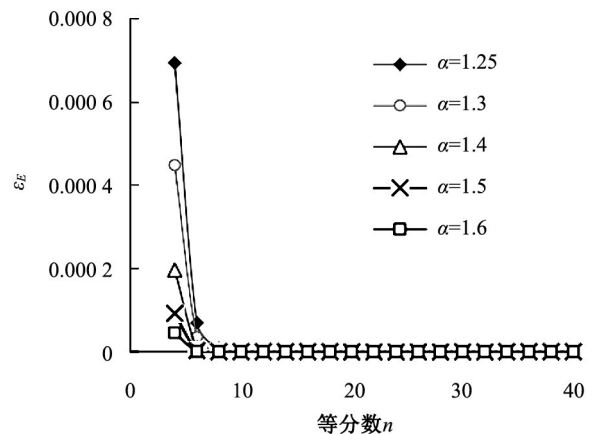
得到按梯形法数值积分时， $F(k, \frac{\pi}{2})$ 和 $E(k, \frac{\pi}{2})$

的收敛误差与等分数 n 的关系，如图 2(a)、(b) 所示。

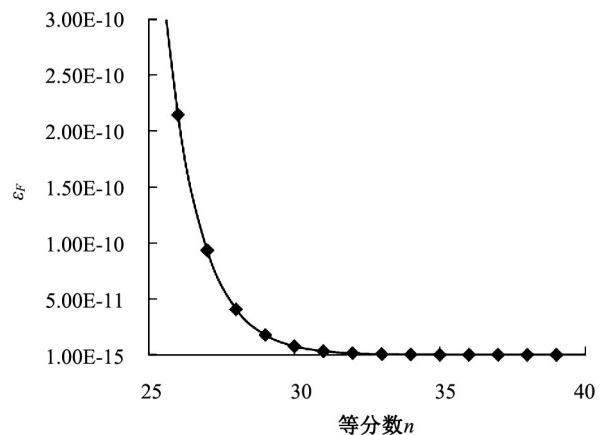
由图 2 可知：



(a) $F(k, \frac{\pi}{2})$ 的收敛误差与 n 的关系



(b) $E(k, \frac{\pi}{2})$ 的收敛误差与 n 的关系



(c) $\alpha=1.25$ 时， $F(k, \frac{\pi}{2})$ 收敛误差与 n 的关系

图 2 收敛误差与等分数 n 的关系图
Fig.2 Relation between convergence error and the number n for equally dividing

(1) 梯形法数值积分时, $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 的收敛误差随等分数 n 的增大急剧减小。

(2) α 越小, 收敛速度越慢。当 $\alpha=1.25$ 时, $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 的收敛误差随等分数 n 的增大而减少的速度最慢。

(3) 放大坐标系, 得到 $\alpha=1.25$ 时, $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 的收敛误差随等分数 n 变化的关系图, 如图 2(c) 所示。可以看出, 当 $n \geq 40$ 时, 在收敛误差减少速度最慢的情况下, 收敛误差也能接近 10^{-15} 。事实上, 计算结果表明, 当 $n \geq 40$ 时, $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 的收敛误差已经小于 10^{-15} 。

因此, 对于充水式坝袋, 只要 $n \geq 40$, 用梯形法数值积分计算 $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, 可以达到非常高的精度。数值试验表明, 对于充气式坝袋, 当 $n \geq 100$, 也可以达到同样高的精度。考虑到通用性, 用梯形法数值积分计算椭圆积分时, 建议等分数 n 取 100。

2.2 龙贝格算法数值积分

梯形法具有 1 次代数精度, 而龙贝格算法具有 7 次代数精度。龙贝格算法利用变步长加速计算的方式, 从较少的等分数 n 开始, 再逐步将 n 加倍, 以较少的等分数 n 得到较高的精度。递推计算过程为:

(1) 取等分数 $n=1$, 按 (12) 式计算梯形法的值 T_n 。

(2) h 减半, 按下式计算 n 加倍后的 T_{2n} 。

$$T_{2n} = \frac{1}{2} T_n + h \sum_{k=1}^n f[a + (2k-1)h] \quad (14)$$

(3) 按加速公式计算 S_n 、 C_n 和 R_n 。

$$S_n = \frac{4}{3} T_{2n} - \frac{1}{3} T_n \quad (15)$$

$$C_n = \frac{16}{15} S_{2n} - \frac{1}{15} S_n \quad (16)$$

$$R_n = \frac{64}{63} C_{2n} - \frac{1}{63} C_n \quad (17)$$

(4) 精度控制, 对于指定精度 ε , 若 $|R_{2n}-R_n| < \varepsilon$, 取 R_{2n} 为所求积分值。否则, 将 n 再加倍, 返回第 (2) 步重新计算。

根据上述过程, 不难绘出龙贝格算法的流程图,

并写出相应的代码。值得注意的是, $n=1$ 时, S_n 、 C_n 和 R_n 没有计算值。为了使程序简洁有效, 在这一步取 $S_{2n}=C_{2n}=R_{2n}=0$, 并在后面传递给 S_n 、 C_n 和 R_n 。这样, 可以使前几步的算法和 $n>8$ 以后的算法保持一致, 避免了多个 IF 判断语句, 大大简化了代码, 提高了运行效率。

数值试验表明, 上述算法效率和精度确实较高。

分别令 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}$ 和 $f(x) = \sqrt{1-k^2 \sin^2 x}$ 来计

算 $F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ 和 $E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, 在 Excel VBA 中运行代码

立刻能得到积分结果, 运行时间不超过 1 秒。此外, 将 n 从 2 加倍到 32, 龙贝格算法的结果即可达到梯形法 $n=100$ 时的精度。可见, 龙贝格算法加速效果明显。

综上所述, 两种数值积分算法都能满足第一、第二类椭圆积分数值计算的要求, 可以根据编程条件选用。

3 坝袋计算与绘图程序的实现

3.1 程序的开发和运行环境

考虑到工程设计中广泛使用 Excel, 坝袋计算与绘图程序选择 Excel VBA 作为程序开发和运行环境。选择 Excel VBA 编程的主要优点有: (1) 可以非常方便地在 Excel 工作表中建立直观的程序界面; (2) 程序的计算结果可以直接输出到 Excel 工作表, 便于工程人员使用; (3) Excel VBA 可以借助 AutoCAD Automation 技术, 将计算得到的坝袋尺寸数据发送到 AutoCAD, 实现自动化绘图。

3.2 程序的流程图与核心代码

根据式 (1)~(17), 可以实现坝袋计算程序, 程序的流程图如图 3 所示。

程序的核心代码除前面的数值积分代码外, 还有以下关键点:

(1) 对 Excel 单元格数据的读写, 调用表格 Sheet 的 Cells(i, j) 属性实现, Cells(i, j) 表示第 i 行、第 j 列的单元格。

(2) Excel VBA 启动 AutoCAD, 采用如下方式:

Dim Acad As AcadApplication' 声明变量

Set Acad = New AcadApplication' 启动新的 AutoCAD 进程

Acad.Visible = True' 使 AutoCAD 可见

采用 New 关键字启动新的 AutoCAD 进程，比采用 CreateObject 函数要简洁有效。

(3)Excel VBA 在 AutoCAD 中绘图，一般调用 ModelSpace 的 AddLine、AddArc、AddSpline 等方法实现。

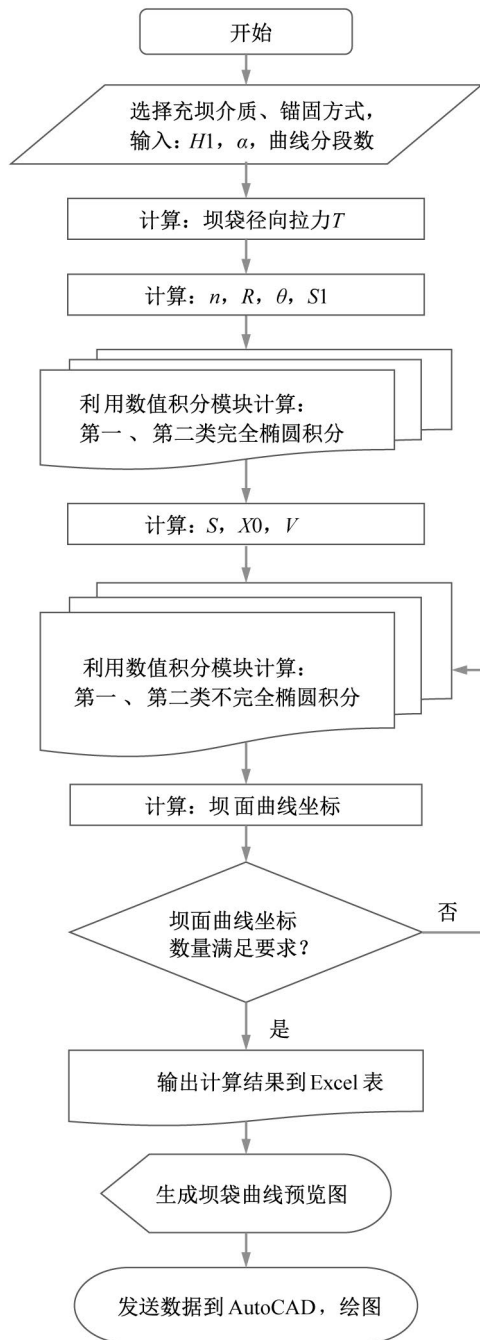


图 3 坝袋计算程序的流程图

Fig.3 Flow chart of calculation program for rubber dam bag

4 程序的应用验证

坝袋曲线的形状和精度主要受内、外压比控制，与坝高无关（规范中的坝袋计算表给出的也是与坝高无关的相对坐标值），所以，程序的验证只取某一坝高的情况即可（事实上，对于规范允许的所有坝高，程序都能给出正确的结果和图形，在此不赘述）。

因此，为验证上述算法的精度和程序的正确性，在规范规定的内、外压比 α 的取值范围 1.25 ~ 1.60 内，分别取 $\alpha=1.25、1.3、1.4、1.5、1.6$ ，应用程序计算并绘出 2.5 m 坝高的坝袋曲线，如图 4 所示。同时，利用规范查表法，计算每个值对应的坝袋下游面坐标点，也绘制于图 4 中。

图 4 表明，对于每个值，利用规范查表法计算的坝袋下游面坐标点，完全落在程序计算的坝袋曲线上。程序计算的数据，在小数点后面的前 4 位与规范查表法计算的数据完全一致（查表法只精确到了小数点后的第 4 位）。而对于上游面的圆弧，程序计算的圆心角、半径等参数也都与规范公式计算的结果吻合。

由此可见，本文提出的算法和相应的程序完全符合规范。此外，规范只给出了有限数量的坝袋曲线坐标点，但程序可以通过改变下游曲线的分段数，获得任意数量的坝袋曲线坐标点，这能为坝袋应力有限元计算、振动分析等研究提供更加精准的几何模型。

5 结论

本文利用数值积分方法求解第一、第二类椭圆积分，实现了橡胶坝坝袋计算程序。程序能快速、准确计算坝袋参数，并自动在 AutoCAD 中绘制坝袋曲线。应用结果表明，程序计算的数据与规范查表法计算的数据完全一致，计算结果符合规范要求。本文方法克服了查表法的缺点，值得在橡胶坝设计中推广应用。

参考文献：

[1] 李 侓. 红旗水库橡胶坝设计的点滴体会 [J]. 水利水电技术, 1995(11): 25-27.
 [2] 傅长锋. 河北省橡胶坝技术的应用及其工程设计 [J]. 水利水电技术, 1998(12): 12-13.
 [3] 高本虎. 国内外橡胶坝发展概况和展望 [J]. 水利水电技

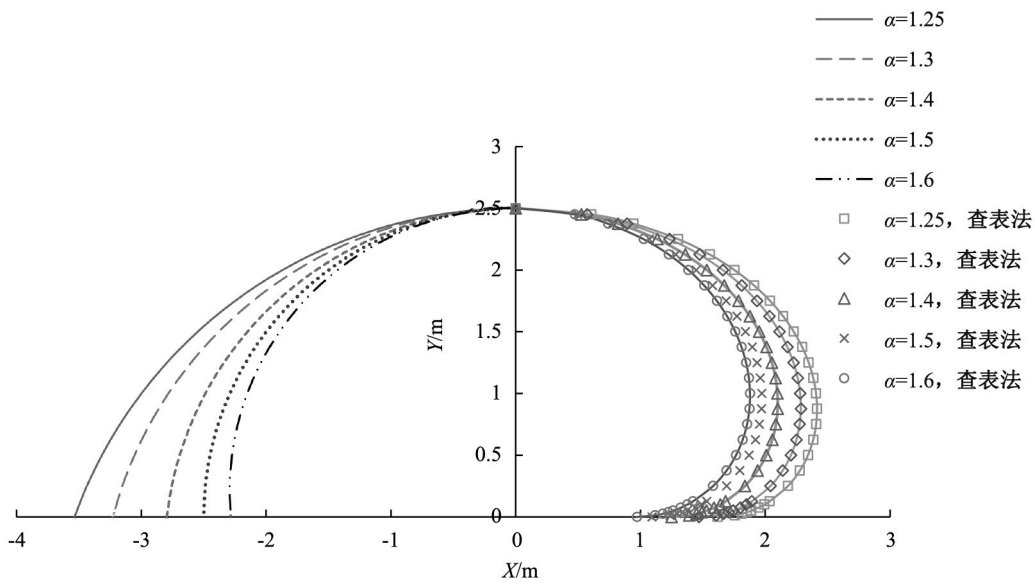


图 4 不同内、外压比 α 的坝袋曲线

Fig.4 Dam bag curve with different internal and external pressure ratios α

术, 2002(10): 5-8.

[4] 关德斌. 橡胶坝在现代城市建设中的美学作用 [J]. 水利水电技术, 2011(2): 29-32.

[5] 廖芳珍, 石自堂. 橡胶坝设计与管理中几个问题的探讨 [J]. 中国农村水利水电, 2014(12): 145-147.

[6] 张鹏, 刘福胜. 充水式橡胶坝蓄水过程有限元静力分析 [J]. 人民黄河, 2010, 32(9): 123-124.

[7] 张鹏, 刘福胜. 溢流橡胶坝有限元分析 [J]. 中国农村水利水电, 2010(4): 105-107.

[8] 蔡新, 李岩. 考虑流固耦合的充水式橡胶坝自振特性研究 [J]. 水电能源科学, 2016, 34(5): 88-90.

[9] GB/T 50979-2014, 橡胶坝工程技术规范 [S].

[10] 王溥文. 橡胶坝技术及应用 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2008: 360.

[11] 赵新民. 一种常用椭圆积分的新解法 [J]. 测绘通报, 1982(3): 35-37.

[12] 刘宝柱, 苏彦华, 张宏林. MATLAB 7.0 从入门到精通 [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010: 88.

[13] 雷庆关, 陈东, 王建国, 等. 基于状态空间精细积分法的闸室底板结构动力响应分析 [J]. 水利水电技术, 2012, 43(4): 45-48.

[14] 许晓亮, 李建林, 龚家伟, 等. Copula 理论下基于 g-line 失效域的边坡可靠性分析 [J]. 岩土力学, 2017, 38(5): 1445-1453.

[15] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2001: 131-135.

(责任编辑 王利君)