

改进的广义 Kelvin 岩石蠕变模型研究

王游¹, 卢小雨^{1,2*}, 李亚倩¹

(1. 安徽理工大学 土木建筑学院, 安徽 淮南 232001; 2. 安徽理工大学 力学与光电物理学院, 安徽 淮南 232001)

摘要: 为了克服传统元件组合模型难以描述岩石蠕变过程中非线性特征的缺陷, 提出一种新的时间触发非线性黏性元件, 并将其与广义 Kelvin 模型串联, 再将岩石蠕变过程中岩石弹性模量的衰减方程引入到广义 Kelvin 模型中, 得到了一个可以模拟岩石蠕变全过程的非线性蠕变模型, 推导了不同恒定荷载情况下的一维和三维蠕变方程。根据通用全局优化算法, 利用前人研究的岩石蠕变实验曲线对非线性蠕变模型进行参数确定和模型验证。模型理论计算值和岩石蠕变实验曲线的对比表明该蠕变模型具有较高的正确性和合理性, 能较好地模拟岩石在不同应力水平下的蠕变变形, 可为今后开展类似研究提供一定的参考价值。

关键词: 蠕变; 非线性; 加速蠕变; 参数辨识

中图分类号: TU452

文献标识码: A

Studies on the Improved Generalized Kelvin Rock Creep Model

WANG You¹, LU Xiaoyu^{1,2*}, LI Yaqian¹

(1. School of Civil Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan, Anhui 232001, China;

2. School of Mechanics and Optoelectronic Physics, Anhui University of Science and Technology, Huainan, Anhui 232001)

Abstract: To overcome the shortcoming that the traditional component assembly model is difficult to describe the nonlinear characteristics of rock creep process, a new time-triggered nonlinear viscous component was proposed for series connection with the generalized Kelvin model. Then, the modulus attenuation equation of rock elasticity modulus during the rock creep process was introduced into the generalized Kelvin model to obtain a nonlinear creep model that can simulate the whole process of rock creep. Then, the one-dimensional and three-dimensional creep equations under different constant loads were derived. According to the general global optimization algorithm, parameter determination and model verification of the nonlinear creep model were performed by using the rock creep experiment curve of previous researches. The comparison between the theoretical calculation value of the model and the rock creep experiment curve shows that the nonlinear creep model is highly accurate and rational. It can better simulate the creep deformation of rock at different stress levels, and can provide certain reference value for carrying out similar researches in the future.

Key words: creep; nonlinear; accelerated creep; parameter identification

岩石蠕变是指岩石在应力、水、温度等复杂条件下, 岩石所呈现的与时间相关的某些力学特性, 如弹性后效、松弛、破坏等, 即时间效应^[1], 它是岩石固有的属性之一, 影响着岩体结构的长期安全性和稳定性, 建立能全面模拟岩石蠕变变形的蠕变模型一直是岩石蠕变研究的热点和难点。由

于岩石本身的复杂性, 其力学参数往往随加载时间不断变化, 采用非线性的蠕变模型更能准确模拟岩石蠕变全过程^[2]。目前建立岩石非线性蠕变模型的方法主要采用以下两种: 一是设计新的非线性元件代替线性元件, 如陈家瑞^[3]在三参量蠕变模型的基础上引入非牛顿体, 从而得到了非线

收稿日期: 2020-08-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51974008)

作者简介: 王游(1992-), 男, 安徽宿州人, 硕士研究生, 主要从事岩石蠕变损伤力学方面的研究。

* 通讯作者: 卢小雨(1978-), 男, 江苏滨海人, 博士, 副教授, 主要从事矿山工程力学方面的研究。

性蠕变模型,该模型可以较好地模拟岩石在不同应力水平下的蠕变曲线;苏腾等^[4]基于分数阶导数和连续介质损伤理论建立了非线性蠕变模型,该模型可以较好地模拟岩石在不同应力载荷下的蠕变形式且能反映岩石的力学性质在不同蠕变阶段的变化情况。二是引入损伤力学理论和 Lemaitre 等效原理,将损伤因子引入蠕变方程中,进而建立蠕变损伤模型,如罗润林等^[5]基于岩石蠕变机理,引入硬化函数和损伤变量,建立了岩石非线性蠕变模型;刘新喜等^[6]基于 Kachanov 损伤理论把损伤影响参数引入 Maxwell 模型,使其符合蠕变软化阶段的损伤特性;曹文贵等^[7]引入损伤理论和 Kachanov 损伤演化规律,建立了一个可以充分反映岩石加速蠕变特性的模型;丁靖洋等^[8]基于岩石加速蠕变过程中的力学特性,假定 Abel 黏壶的黏性系数损伤符合 Weibull 随机分布,得到了盐岩蠕变损伤模型,取得了较好的拟合结果;杨逾等^[9]基于 Lemaitre 原理建立了非线性损伤 Burgers 模型,取得了较好的拟合结果;王春萍等^[10]基于花岗岩高温蠕变过程的损伤效应并考虑弹性模量和黏性系数随温度的变化关系,建立了高温条件下的温度损伤元件,该元件可以较好地模拟岩石加速蠕变变形。

综上所述,尽管国内外许多学者在岩石蠕变模型方面取得了一些研究成果,但存在着以下几个问题:首先,模型参数辨识不合理,有的学者直接用一维蠕变方程去拟合常规三轴蠕变实验,虽然可以取得较好的拟合结果,但模型参数在一维和三维应力情况下物理含义并不相同;其次,岩石蠕变参数与时间成函数关系,把损伤因子引入线性元件后,采用微分方程的形式求解蠕变方程存在一定的困难,增加了蠕变方程的描述难度,这也是现阶段蠕变模型存在的主要问题,并且有的学者直接把有效参数引入元件组合模型中,这导致有的模型在数学上并不严谨;最后,目前大多数蠕变模型以岩石长期强度为依据来改进和组合进而建立能模拟岩石加速蠕变的模型,而以加载时间为依据而建立的模型较少^[11]。因此在蠕变模型已有研究成果的基础上,考虑岩石弹性模量衰减规律和引进一种带时间触发的非线性黏性体,将之与广义 Kelvin 模型进行组合,得到了一个能够全面模拟岩石蠕变变形的非线性蠕变模型,该模型描述较为简单,克服了传统模型不能全面模拟岩石蠕变变形的不足,且不需要知道岩石的长期强

度,引入相关蠕变试验数据验证蠕变模型的合理性和适用性,并对模型参数进行敏感性分析,研究成果可为今后开展类似研究提供一定的参考价值。

1 非线性蠕变模型的建立

广义 Kelvin 模型由一个弹性元件与一个黏性体并联后再与一个弹性元件串联组成。模型如图 1 所示:

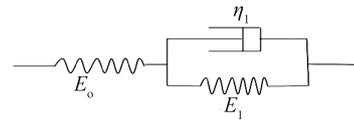


图 1 广义 Kelvin 模型

Fig. 1 Generalized Kelvin model

广义 Kelvin 模型的蠕变方程可表示为:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_1 t}{\eta_1}\right) \right) \quad (1)$$

式中, ε 为蠕变量; E_0 为弹性体弹性模量; η_1 为 Kelvin 体黏性系数; E_1 为 Kelvin 体弹性模量; σ_0 加载应力。

广义 Kelvin 模型难以模拟岩石加速蠕变变形,同时模型的黏弹性参数并不是定常数,而是随加载时间不断变化的参数。张树光等^[12-13]研究表明岩石弹性模量随加载时间不断减少,因此假定广义 Kelvin 模型中弹性体弹性模量符合下式:

$$E(t) = a + b \exp(-ct) \quad (2)$$

式中, a 、 b 、 c 为无量纲参数。

当 $\sigma = \sigma_0$ 时,弹性体一维蠕变方程为:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{(a + b \exp(-ct))} \quad (3)$$

岩石蠕变可以分为衰减蠕变,等速蠕变和加速蠕变三个阶段,而每个阶段对应不同的起始时间,由于时间具有不可逆性,故引入一个带时间触发的非线性黏性元件来模拟岩石的加速蠕变变形。非线性黏性元件模型如图 2 所示。

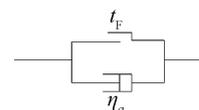


图 2 非线性黏性元件

Fig. 2 Nonlinear viscous element

该元件满足以下应力-应变关系:

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & t < t_F \\ \frac{\sigma}{\eta_a} \exp(t - t_F)^\lambda & t \geq t_F \end{cases} \quad (4)$$

式中, t_F 为岩石加速蠕变起始时间; λ 蠕变参数; η_a 非线性黏性元件黏性系数; t_F 确定方法见文献[14]。

将非线性黏性元件与广义 Kelvin 模型进行组合, 从而得到新的非线性蠕变模型。模型如图 3 所示:

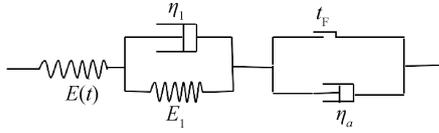


图 3 非线性蠕变模型

Fig. 3 Nonlinear creep model

在 $t = 0$ 时, 对模型施加恒定应力 σ_0 , 则有

(1) 对于弹性体 $E(t)$, 其本构方程为:

$$\sigma_0 = E(t)\varepsilon_0 = (a + b\exp(-ct))\varepsilon_0 \quad (5)$$

式中, $E(t)$ 为式(2)表达式, ε_0 为弹性体应变。

(2) 对于 Kelvin 体, 其本构方程为:

$$\sigma_0 = E_1\varepsilon_1 + \eta_1\dot{\varepsilon}_1 \quad (6)$$

对式(6)进行变换求积分, 并考虑初始条件:

$t = 0, \varepsilon_1 = 0$, 则有

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_1 t}{\eta_1}\right) \right) \quad (7)$$

式中, ε_1 为 Kelvin 体应变。

(3) 对于非线性黏性元件, 其本构方程为:

$$\sigma_0 = \frac{\eta_a \varepsilon_2}{\exp(t - t_F)^\lambda} \quad (8)$$

式中, ε_2 为非线性黏性体应变。

由于应变可以叠加, 则根据式(5)、(7)、(8), 可得岩石在一维应力状态下非线性蠕变方程为:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{a + b\exp(-ct)} + \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_1 t}{\eta_1}\right) \right), \quad t < t_F \quad (9)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{a + b\exp(-ct)} + \frac{\sigma_0}{E_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_1 t}{\eta_1}\right) \right) + \frac{\sigma_0}{\eta_a} \exp(t - t_F)^\lambda, \quad t \geq t_F \quad (10)$$

式(9)可模拟岩石衰减蠕变变形和等速蠕变变形, 式(10)可模拟岩石蠕变全过程。

将一维蠕变模型推广到三维应力状态下, 更符合岩石实际受力状态, 具有更高的参考价值。在三维应力状态下, 岩石内部张量 σ_{ij} 可分解为球应力张量 σ_m 和偏应力张量 S_{ij} , 同样岩石应变张量 ε_{ij} 由球应变张量 ε_m 和偏应变张量 e_{ij} 组成^[15], 并且在弹性状态满足:

$$\begin{cases} \sigma_m = 3K\varepsilon_m, S_{ij} = 2Ge_{ij} \\ K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, G = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{cases} \quad (11)$$

式中, K 为体积模量; G 为剪切模量; E 为弹性模量; μ 为泊松比, 可认为不变。

由广义塑性力学可知, 岩石类材料中的塑性应变问题应采用相关联流动法则来解决, 对于常规三轴蠕变实验, 一般认为球应力张量对岩石蠕变影响很小, 偏应力张量在岩石蠕变中起主要作用, 因此屈服函数可采用 Mises 函数, 因此三维蠕变方程可表示为:

$$\varepsilon(t) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{a + b\exp(-ct)} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{G_1 t}{\eta_1}\right) \right), \quad t < t_F \quad (12)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{a + b\exp(-ct)} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{G_1 t}{\eta_1}\right) \right) + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3\eta_a} \exp(t - t_F)^\lambda, \quad t \geq t_F \quad (13)$$

式中, G_1 为弹性体剪切模量, 其余参数与上文一致。

2 参数辨识及敏感性分析

2.1 参数辨识和模型验证

将蠕变实验数据代入岩石蠕变模型中进行曲线拟合和参数反演是蠕变研究中常用的方法, 1stOpt 软件凭借其超强收敛速度和不受初始赋值的影响, 通过其独特的全局优化算法, 在大多数情况下都能取得较好的结果^[16]。为验证新的岩石蠕变模型的正确性和适用性, 拟合了白垩系冻结软岩蠕变试验数据^[17]和天然页岩蠕变试验数据^[18]。拟合结果分别如图 4、图 5 所示, 参数反演结果见表 1、表 2。

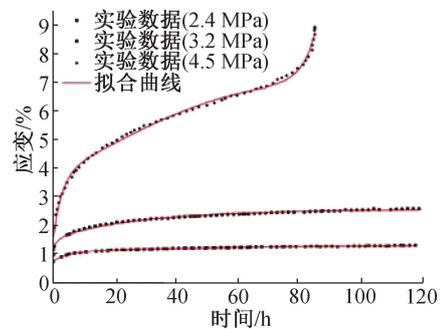


图 4 软岩非线性蠕变模型与实验结果对比

Fig. 4 Comparison of soft rock nonlinear creep model and experimental results

表 1 软岩非线性蠕变模型参数

Tab. 1 Parameters of soft rock nonlinear creep model

应力 /MPa	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>E</i> ₁ /MPa	η_1 /MPa·h	η_a /MPa·h	λ	<i>t</i> _F /h	<i>R</i> ²
2.4	242.64	87.02	0.021 49	727.9	3 114.8	—	—	—	0.997 57
3.2	209.13	49.34	0.571 27	312.7	8 936.58	—	—	—	0.987 44
4.5	92.68	228.24	0.045 44	184.63	532.81	13 638.51	0.024 504	69	0.965 96

表 2 页岩非线性蠕变模型参数

Tab. 2 Parameters of shale nonlinear creep model

应力 /MPa	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>E</i> ₁ /MPa	η_1 /MPa·h	η_a /MPa·h	λ	<i>t</i> _F /h	<i>R</i> ²
41	19 491	42 181	0.007 2	37 680.86	742 725	—	—	—	0.999 46
55	24 757	25 833	0.047 9	7 743.77	5 215 380	904 359	0.036 75	166	0.997 71

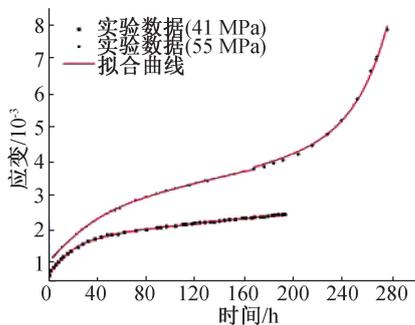


图 5 页岩非线性蠕变模型与实验结果对比
Fig. 5 Comparison of shale nonlinear creep model and experimental results

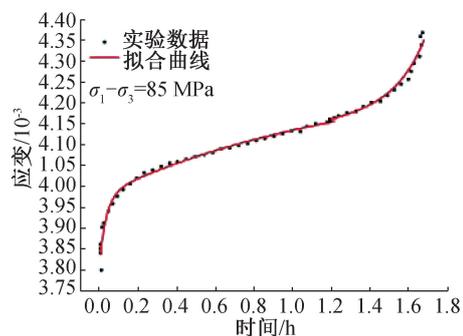


图 6 绿片岩非线性蠕变模型与实验结果对比
Fig. 6 Comparison of greenschist nonlinear creep model and experimental results

从图 4、图 5 对比情况来看,本文建立的非线性蠕变模型与实验数据吻合程度较好(尤其是加速蠕变阶段),模型能够模拟岩石各个阶段蠕变曲线,同时也验证本文建立的非线性蠕变模型对软硬岩及不同加载应力水平下都具有较好的适用性。

引入绿片岩^[19]和红砂岩^[20]的三轴压缩蠕变实验数据进一步验证该模型对岩石加速蠕变变形模拟的准确性和适用性。为了拟合实验数据方便,将三维蠕变方程进行系数简化,简化结果如式(14)所示,拟合结果分别如图 6、图 7 所示,拟合参数见表 3。

$$\varepsilon(t) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{a + b \exp(-ct)} + a_0(1 - \exp(-a_1t)) + a_2 \exp(t - t_F)^\lambda \quad (14)$$

式中, $a_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3G_1}$, $a_1 = \frac{G_1}{\eta_1}$, $a_2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3\eta_a}$, 其余参数意义与上文一致。

从拟合结果与实验数据对比情况来看,再次说明该模型对不同蠕变破坏时间下的加速蠕变变形都能够较好地模拟。

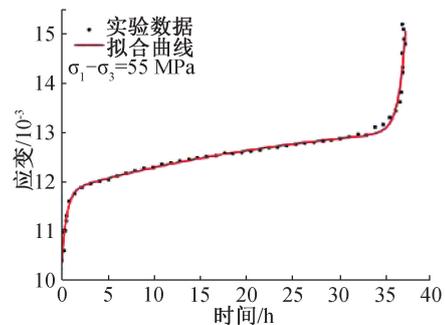


图 7 红砂岩非线性蠕变模型与实验结果对比
Fig. 7 Comparison of red sandstone nonlinear creep model and experimental results

2.2 参数 λ 对蠕变全过程曲线影响分析

参数 *a*、*b*、*c* 表示岩石弹性模量随加载时间的变化关系,已有许多学者对此进行分析^[21],在此并不详述。岩石加速蠕变特性是影响地下工程稳定性和安全性的主要力学特性,在此给出参数 λ 对岩石蠕变全过程曲线的影响。结果如图 8 所示。

图 8 分析了蠕变参数 λ 对岩石蠕变全过程曲线的影响,图中给出了蠕变参数 λ 为 0.025、0.036 75、

表 3 加速蠕变模拟参数

Tab. 3 Accelerated creep simulation parameters

岩性	a	b	c	a_0	a_1/h^{-1}	a_2/h^{-1}	λ	t_F/h	R^2
绿片岩	20 723.1	1 546.385 9	0.841 7	1.691E-4	28.057 7	6.396 61E-6	6.618 93	1.2	0.981 3
红砂岩	4 655.48	628.965 04	1.944 8	0.001 67	0.033 9	1.063 99E-5	1.134 15	33.1	0.992 6

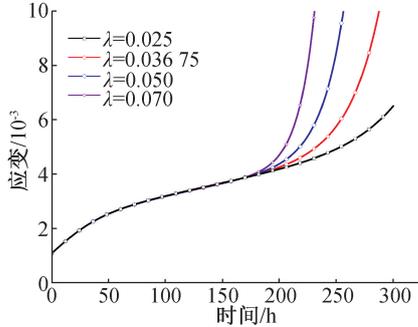


图 8 蠕变参数 λ 变化对全程蠕变曲线的影响
Fig. 8 The impact of creep parameters λ changes on the whole-process creep curve

0.050、0.070 时蠕变曲线的对比(其余参数见表 2, 加载应力为 55 MPa)。由图 8 可知,保持模型中其他参数不变,岩石加速蠕变变形和蠕变速率随参数 λ 的增大而呈现非线性增大,岩石更快地进入加速蠕变阶段,根据 λ 取值的不同,该模型可以模拟不同岩性及不同应力水平下的加速蠕变变形。

3 结论

1)在广义 Kelvin 模型的基础上串联一个带时间触发的非线性黏性体,同时考虑岩石弹性模量随加载时间的衰减规律,从而建立了新的非线性蠕变模型,并给出了模型的一维和三维蠕变方程。

2)引入相关蠕变实验数据对非线性蠕变模型的合理性和可行性进行验证并同时反演得到模型参数,结果表明该模型可以准确模拟各类岩石的非线性蠕变曲线(尤其是加速蠕变阶段),克服了传统经典模型的不足。

3)对模型蠕变参数 λ 进行了分析,结果表明随着参数 λ 的增加,岩石加速蠕变速率也增大,岩石更快地进入加速蠕变阶段,也说明岩石加载时间是导致岩石蠕变破坏的一个十分重要的因素。

参考文献:

[1] 孙 钧. 岩土材料流变及其工程应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999.
[2] 孙 钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(06): 1081-1106.
[3] 陈家瑞, 浦海, 肖成. 基于分数阶理论的破碎泥岩流变

模型试验研究[J]. 中国矿业大学学报, 2015, 44(06): 996-1001.
[4] 苏 腾, 周宏伟, 赵家巍, 等. 基于变阶分数阶导数的岩石蠕变模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(07): 1355-1363.
[5] 罗润林, 阮怀宁, 朱昌星. 基于塑性强化和粘性弱化的岩石蠕变模型[J]. 西南交通大学学报, 2008, 43(03): 346-351.
[6] 刘新喜, 童庆闯, 侯 勇, 等. 高应力泥质粉砂岩非线性蠕变损伤模型研究[J]. 中国公路学报, 2018, 31(02): 280-288.
[7] 曹文贵, 袁靖周, 王江营, 等. 考虑加速蠕变的岩石蠕变过程损伤模拟方法[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2013, 40(02): 15-20.
[8] 丁靖洋, 周宏伟, 李 潮, 等. 基于 Weibull 分布的盐岩分数阶蠕变本构模型研究[J]. 固体力学学报, 2013, 34(05): 473-480.
[9] 杨 逾, 魏 珂, 刘文洲. 基于 Lemaitre 原理改进砂岩蠕变损伤模型研究[J]. 力学季刊, 2018, 39(01): 164-170.
[10] 王春萍, 陈 亮, 梁家玮, 等. 考虑温度影响的花岗岩蠕变全过程本构模型研究[J]. 岩土力学, 2014, 35(09): 2493-2500.
[11] 王路军, 周宏伟, 荣腾龙, 等. 深部煤体非线性蠕变本构模型及实验研究[J]. 煤炭学报, 2018, 43(08): 2196-2202.
[12] 张树光, 刘文博, 陈 雷, 等. 基于力学参数时效性的非定常蠕变模型[J]. 中国矿业大学学报, 2019, 48(05): 993-1002.
[13] 刘开云, 薛永涛, 周 辉. 参数非定常的软岩非线性黏弹塑性蠕变模型[J]. 中国矿业大学学报, 2018, 47(04): 921-928.
[14] 刘开云, 薛永涛, 周 辉. 基于改进 Bingham 模型的软岩参数非定常三维非线性黏弹塑性蠕变本构研究[J]. 岩土力学, 2018, 39(11): 4157-4164.
[15] 单仁亮, 白 瑶, 孙鹏飞, 等. 冻结层状红砂岩三轴蠕变特性及本构模型研究[J]. 中国矿业大学学报, 2019, 48(01): 12-22.
[16] 舒志乐, 刘保县, 黄 山, 等. 软岩非线性黏弹塑性蠕变模型及参数识别[J]. 采矿与安全工程学报, 2017, 34(04): 803-809.
[17] 李栋伟, 汪仁和, 范菊红. 白垩系冻结软岩非线性流变模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(03): 398-403.
[18] 杨彩红, 毛 君, 李剑光. 改进的蠕变模型及其稳定性[J]. 吉林大学学报: 地球科学版, 2008, (01): 92-97.
[19] 徐卫亚, 杨圣奇, 褚卫江. 岩石非线性黏弹塑性流变模型(河海模型)及其应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2006(03): 433-447.
[20] 齐亚静, 姜清辉, 王志俭, 等. 改进西原模型的三维蠕变本构方程及其参数辨识[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(02): 347-355.
[21] 许宏发. 软岩强度和弹模的时间效应研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1997, 16(03): 47-52.
(责任编辑 周雪梅)