文章编号:1673-9469(2008)02-0110-03

一类负相依随机变量序列的强大数定律

路瑞华[1],王小胜[1],陈 爽[2],杨 阳[1]
(1.河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038;2.河北工业大学 理学院,天津 300130)

摘要:本文利用 Hajek-Renyi 型最大值不等式得到了一类负相依随机变量序列的强大数定律,从而使某些已知结果为其特例。

关键词:负相依;随机变量;强大数定律;Hajek-Renyi 型不等式
中图分类号:O221.4 **文献标识码**:A

The strong law of large numbers for negatively associated random variables

LU Rui-hua[1], WANG Xiao-sheng[1], CHEN Shuang[2], YANG Yang[1]
(1. College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China;
2. College of Science, Hebei University of Technolony, Tianjin 300130, China)

Abstract: Some results of the strong law of large numbers under negative association are obtained by using a maximal inequality. As corollaries, some results are the particular cases of the result in this paper.

Key words: negative association; random variable; the strong law of large numbers; maximal inequality

设$\{X_n, n\geq 1\}$为定义在概率空间$\{\Omega, F, P\}$上的随机变量序列,记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $n\geq 1$, $S_0=0$。Fazekes & Klespv(2000)建立了一类 Hajek-Renyi 型不等式[1],然后利用所获得的不等式得到了一类随机变量和的强大数定律。本文主要是应用此大数定律讨论了一类不具有平稳分布的负相依随机变量的强大数定律,从而推广了在独立情形下成立的 Komogrov 强大数定律[2]、Chung 强大数定律[3]及 Teicher 强大数定律[4]。在本文的证明中 C 表示正常数,并且在不同之处可以取不同的值。

定义 1 称$\{X_n, n\geq 2\}$是负相依随机变量序列,如果对于任何两个非空不交子集 $T_1, T_2\subset\{1,2,\cdots,n\}$都有 $Cov\{f(X_i, i\in T_1), g(X_j, j\in T_2)\}\leq 0$。

其中 f 和 g 是任何两个使上述协方差存在的且对每个变元均非降(或均非升)的函数,且 $f\in R^{T_1}$, $g\in R^{T_2}$。

注 1:若$\{X_n, n\geq 2\}$是负相依随机变量序列,$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是单调增加(或者单调减少)的 Borel 函数,则 $f_1(X_1), f_2(X_2), \cdots, f_n(X_n)$也是负相依随机变量序列。

下面利用 Hajek-Renyi 型最大值不等式讨论一类负相依随机变量序列的强大数定律。

引理 1 设$\{X_n, n\geq 1\}$是零均值的负相依随机变量序列,并且具有有限四阶矩,则对于任意的 $\varepsilon>0$,有以下不等式成立

$$E[\max_{1\leq i\leq n}|S_i|]^4\leq\sum_{i=1}^{n}EX_i^4+6\sum_{i=2}^{n}EX_i^2\sum_{j=1}^{i-1}EX_j^2$$

引理 2 设$\{b_n\}$, $\{\alpha_n\}$是实数列,$0<b_1\leq b_2\leq\cdots$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, $\alpha_n\geq 0$。设 r 是 C 固定的正数,使得对于$\forall n\geq 1$, $E[\max_{1\leq i\leq n}|S_i|]^r\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$, $\forall n\geq 1$。

如果 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i}{b_i^r}<\infty$,则$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}=0 \quad a.s.$

定理 1 设$\{X_n, n\geq 1\}$是负相依随机变量序列,$\{\varphi_n\}$是正 Borel 函数序列,满足$\lim_{x\to\infty}\varphi_n(x)=\infty$,使得

收稿日期:2008-03-03
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10571076) 特约专稿
作者简介:路瑞华(1980-),女,河南安阳人,硕士,从事概率论、信息论教学与研究工作。

$$\mu \geq v \Rightarrow C_n \frac{\mu^{\alpha_n}}{v^{\alpha_n}} \leq \frac{\varphi_n(\mu)}{\varphi_n(v)} \leq D_n \frac{\mu^{\beta_n}}{v^{\beta_n}}$$

其中 $C_n > 0, D_n > 0, \alpha_n \geq 1, \beta_n \leq p$。如果对某个 p $(1 < p \leq 2)$有

$$\sum_{i=2}^{\infty} i^{-p} D_n E \frac{\varphi_n(|X_i|)}{\varphi_n(i)} \sum_{j=1}^{i-1} j^p D_n E \frac{\varphi_n(|X_j|)}{\varphi_n(j)} < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] < \infty$$

其中$\{a_i, i \geq 1\}$是使得$\sum_{i=1}^{\infty} A_n \frac{E\varphi_n(|X_i| I[|X_i| < a_i])}{\varphi_n(i)} < \infty$, $A_n = \max\left\{\frac{1}{C_n}, D_n\right\}$的正数数列,则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i I[|X_i| < a_i]) = 0 \qquad a.s.$$

推论1 $\{X_n, n \geq 1\}$是零均值的负相依随机变量序列,记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1$。

设$\{a_n, n \geq 1\}$为一递增的正实数数列,并且 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$。

若

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{EX_i^2}{a_i^4} \sum_{j=1}^{i-1} EX_j^2 < \infty \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{EX_i^2}{a_n^2} \to 0 \tag{2}$$

存在常数 $C_i > 0$,使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| > C_i < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 \frac{EX_i^2}{a_i^4} < +\infty \tag{3}$$

则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \qquad a.s.$

注2:推论1中针对不同的 a_n 及 p, q 可以得到很多关于负相依随机变量序列的强大数定律,其中包括一些独立情形下的经典结果:例如令 $a_n = n$,不难看出经典的 Kolmogorov 条件意味着推论中的(1)-(3)均成立,故推论1可视为对独立情形下的 Kolmogorov 强大数定律及 Matula 定理的推广。

推论2[4] $\{X_n, n \geq 1\}$为独立、零均值的随机变量序列,并且满足

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{EX_i^2}{i^4} \sum_{j=1}^{i-1} EX_j^2 < +\infty$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{EX_i^2}{n^2} \to 0$$

存在常数 $C_i > 0$,使得$\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| > C_i < +\infty$。

且$\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 \frac{EX_i^2}{i^4} < +\infty$

则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \qquad a.s.$

注3:由于独立随机变量序列为特殊的负相依随机变量序列,因此定理1、推论1均适用于独立情形。以下为定理1的证明。

证明:设 $X'_i = X_i I[|X_i| < i], Y_i = X'_i - EX'_i$, $S'_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 则

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[X_i \neq X'_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq i] = \sum_{i=1}^{\infty} E\{[I(|X_i| \geq i)][I(|X_i| \geq a_i)] + [I(|X_i| \geq i)][I(|X_i| < a_i)]\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_n} E \frac{\varphi_n(|X_i|)}{\varphi_n(i)} [I(|X_i| \geq i)][I(|X_i| < a_i)] \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{C_n} E \frac{\varphi_n(|X_i|)}{\varphi_n(i)} [I(|X_i| < a_i)] \leq \sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} A_n E \frac{\varphi_n(|X_i|)}{\varphi_n(i)} [I(|X_i| < a_i)] < \infty$$

故由 Borel-Cantelli 引理,只要证明$\frac{S'_n}{a_n} \to 0 \quad a.s.$

由引理1得

$$E[\max_{1\leq i\leq n} |S'_i|]^4 \leq \sum_{i=1}^{n} EX'^4_i + 6\sum_{i=2}^{n} EX'^2_i \sum_{j=1}^{i-1} EX'^2_j \leq 6[EX'^4_1 + \sum_{i=2}^{n} (EX'^4_i + EX'^2_i \sum_{j=1}^{i-1} EX'^2_j)]$$

由引理2,令 $\alpha_1 = EX'^4_1, \alpha_i = EX'^4_i + EX'^2_i \sum_{j=1}^{i-1} EX'^2_j$, $i = 2, 3, \cdots, n$

为了证明$\frac{S'_n}{a_n} \to 0 \quad a.s.$,只要证明$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{i^4} < \infty$也就是证明

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{EX'^4_i}{i^4} < \infty, \sum_{i=2}^{\infty} \frac{EX'^2_i}{i^4} \sum_{j=1}^{i-1} EX'^2_j < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{EX'^4_i}{i^4} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X_i I[|X_i| < i])^4}{i^4} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X_i I[|X_i| < i][I(|X_i| \geq a_i)] + X_i I[|X_i| < i][I(|X_i| < a_i)])^4}{i^4} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X_i I[|X_i| < \min(a_i, i)])^4}{i^4} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X_i)^{2p} I[|X_i| < \min(a_i, i)]}{i^{2p}} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X'_i)^{2p} I[|X_i| < \min(a_i, i)]}{i^{2p}} \leq$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \geq a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X'_i)^{p} I[|X_i| < \min(a_i, i)]}{i^{p}} \tag{1}$$

由 $\{\varphi_n\}$ 函数列的定义 $\left(\frac{|X'_i|}{i}\right)^p \le D_n \frac{\varphi_n(|X'_i|)}{\varphi_n(i)}$，则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{E(X'_i)^p I[|X_i| < \min(a_i, i)]}{i^p} \le \sum_{i=1}^{\infty} D_n \frac{E\varphi_n(|X_i| I[|X_i| < \min(a_i, i)])}{\varphi_n(i)}$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{EX'^4_i}{i^4} \le \sum_{i=1}^{\infty} P[|X_i| \ge a_i] + \sum_{i=1}^{\infty} D_n \frac{E\varphi_n(|X_i| I[|X_i| < \min(a_i, i)])}{\varphi_n(i)} < \infty$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{EX'^2_i}{i^4} \sum_{j=1}^{i-1} EX'^2_j \le \sum_{i=2}^{\infty} \frac{E|X'_i|^p}{i^{2p}} \sum_{j=1}^{i-1} E|X'_j|^p = \sum_{i=2}^{\infty} i^{-p} \frac{E|X'_i|^p}{i^p} \sum_{j=1}^{i-1} j^p \frac{E|X'_j|^p}{j^p} \le$$
$$\sum_{i=2}^{\infty} i^{-p} D_n \frac{E\varphi_n(|X'_i|)}{\varphi_n(i)} \sum_{j=1}^{i-1} j^p D_n \frac{E\varphi_n(|X'_j|)}{\varphi_n(j)} \le$$
$$\sum_{i=2}^{\infty} i^{-p} D_n \frac{E\varphi_n(|X_i|)}{\varphi_n(i)} \sum_{j=1}^{i-1} j^p D_n \frac{E\varphi_n(|X_j|)}{\varphi_n(j)} < \infty \qquad (2)$$

由(1)、(2)可得证命题。

参考文献:

[1] FAZEKES I, KLESOV O. A general approach to the strong law of large numbers[J]. Theory Probab. Appl., 2000, 45: 436 - 449.

[2] 林正炎,陆传荣,苏中根.概率极限理论基础[M].北京:高等教育出版社,1999.

[3] CHUNG K L. Note on some strong laws of large numbers [J]. Amer. J. Math., 1947, 69: 189 - 192.

[4] TEICHER H. Some new conditions for the strong law[J]. Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 1968, 59: 705 - 707.

[5] MATULA P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively associated random variables[J]. Statist. Probab. Lett. Appl., 1992, 15: 209 - 213.

[6] SHAO Q M. Maximal inequalities for partial sums of sequences[J]. Ann. Probab., 1995, 23: 948 - 965.

（责任编辑 闫纯有）

一类负相依随机变量序列的强大数定律

作者： 路瑞华， 王小胜， 陈爽， 杨阳， LU Rui-hua， WANG Xiao-sheng， CHEN Shuang， YANG Yang

作者单位： 路瑞华,王小胜,杨阳,LU Rui-hua,WANG Xiao-sheng,YANG Yang(河北工程大学,理学院,河北,邯郸,056038)， 陈爽,CHEN Shuang(河北工业大学,理学院,天津,300130)

刊名： 河北工程大学学报（自然科学版）ISTIC

英文刊名： JOURNAL OF HEBEI UNIVERSITY OF ENGINEERING(NATURAL SCIENCE EDITION)

年，卷(期)： 2008,25(2)

参考文献(6条)

1. FAZEKES I;KLESOV O A general approach to the strong law of large numbers[外文期刊] 2000(3)

2. 林正炎;陆传荣;苏中根 概率极限理论基础 1999

3. CHUNG K L Note on some strong laws of large numbers[外文期刊] 1947

4. TEICHER H Some new conditions for the strong law[外文期刊] 1968

5. MATULA P A note on the almost sure convergence of sums of negatively associated random variables [外文期刊] 1992

6. SHAO Q M Maximal inequalities for partial sums of sequences[外文期刊] 1995(2)