

文章编号:1673-9469(2008)03-0030-04

# 工程结构的非线性有限元分析

苏 枋,王建祥,慈 军,葛倚汀

(新疆农业大学 学校管理办公室,新疆 乌鲁木齐 830052)

**摘要:**有限元法作为一种非常有效的数值分析方法,在分析大型复杂结构中得到广泛应用。探讨了在分析非线性问题时常使用的迭代法和增量法及其各自的缺点。而由迭代法和增量法结合而成的混合方法,有效的解决了纯粹迭代法和增量法的不足。并应用此混合方法,对工程结构进行了有限元计算,分析了其承载能力,减小了分析空间非线性问题的误差。

**关键词:**空间非线性;有限元;迭代法;增量法;承载能力

中图分类号: TU31

文献标识码: A

## Space non-linear finite element analysis in engineering structure

SU Fang, WANG Jian-xiang, CI Jun, GE Yi-ting

(School Administration Office, Xinjiang Agricultural University, Urumqi 830052, China)

**Abstract:** Finite element method as a very effective numerical analysis method applying in the analysis large-scale complex structure. This article introduced the space non-linear finite element analysis method, the iteration method and increases method which was often used in the analysis non-linear problem and their respective shortcomings were discussed. Mixed method which becomes by iteration method and increase method union, effectively solved shortcomings and insufficiencies of purely iteration method and increase method. Finally, the finite element computation to the engineering structure was carried out by applying the mixed method and its bearing capacity was analyzed. The results showed that the error of analysis space non-linear problem could be reduced.

**Key words:** space non-linear; finite element; iteration method; increase method; bearing capacity

有限元法作为一种理论基础和广泛应用的数值分析方法,是大型复杂结构或多自由度体系分析的有力工具,已广泛地用于工程结构、传热、流体运动、电磁等连续介质力学分析中<sup>[1]</sup>。有限元法适应性强、程序通用性高、使用灵活方便、易于掌握,丰富的单元库能精确模拟结构的几何形状,适应复杂的边界条件。目前,三维有限元正以其独有的优点广泛应用于解决结构的静动力、非线性、断裂和温度应力问题<sup>[2,3]</sup>。

### 1 空间问题有限元

在实际工程中,有些结构由于形体复杂并且三个方向尺寸同量级,此时必须按空间问题求解。

对于空间问题,必须将所考虑的物体划分为空间单元,然后按照有限单元法的基本分析步骤进行。还有适用于具有复杂外形物体的曲面六面体等参单元。

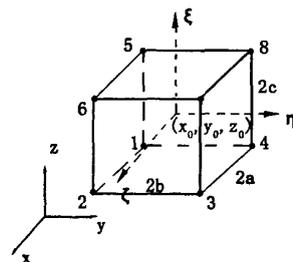


图1 八结点六面体单元

Fig.1 8-node hexahedral element

收稿日期:2008-06-10

基金项目:新疆水利水电工程重点学科基金资助项目(XJZDXK-2002-10-05)

作者简介:苏枋(1963-),女,河南叶县人,副教授,从事力学与工程结构理论及应用研究。

图1所示的三维八结点六面体单元在局部坐标系  $\xi - \eta - \zeta$  中的形函数为

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)$$

$$\zeta_0 = \zeta, \xi$$

$$\eta_0 = \eta, \eta (i = 1, 2, \dots, 8)$$

$$\xi_0 = \xi, \xi$$

$\xi - \eta - \zeta$  坐标系与  $X - Y - Z$  坐标系之间的线性转换关系为

$$\begin{cases} x = x_0 + a\xi \\ y = y_0 + b\eta \text{ 或 } \eta = \frac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 + c\xi \end{cases} \begin{cases} \zeta = \frac{x - x_0}{a} \\ \xi = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

单元结点位移列阵为

$$\{\delta_e\} = \{ \{\delta_1\}^T \ \{\delta_2\}^T \ \{\delta_3\}^T \ \{\delta_4\}^T \ \{\delta_5\}^T \ \{\delta_6\}^T \ \{\delta_7\}^T \ \{\delta_8\}^T \}$$

$$\text{其中子矩阵为 } \{\delta_i\} = [u_i \ v_i \ w_i]^T$$

用结点位移表示的位移函数(即任一点的位移列阵)为  $\{\delta\} = [u \ v \ w]^T = [N]\{\delta_e\}$ 。

## 2 非线性问题有限元

非线性有限元法<sup>[4]</sup>是线性分析有限元法的自然发展,为了更真实地研究结构的力学性能,除保留材料均匀连续性假设条件以外,一般不再引入材料的线弹性假设和小变形假设。

根据引起结构的非线性原因,主要有以下几种类型:

材料非线性;几何非线性;状态变化;还有以上三种问题的混合非线性问题。

考虑材料弹塑性受力时,为了避免应力应变间的多值性带来的困难,故不适合采用全应力应变之间的关系,而应建立在一定加载路线下的增量关系。

弹塑性材料的应变可以分解为弹性和塑性应变之和,即  $\{de\} = \{de_e\} + \{de_p\}$

式中  $de_e$  - 恢复应变;  $de_p$  - 残余应变。

这样就可以导出弹塑性状态下材料的应力-应变增量之间的本构方程为  $\{d\sigma\} = [D_{ep}]\{de\}$

式中  $[D_{ep}]$  叫做弹塑性矩阵。

利用虚位移或最小势能原理建立的刚度方程为  $\{V_e\} + \{P_{ep}\} = [K_e]\{\delta_e\}$

式中  $\{V_e\}$  - 单元结点力列阵;  $\{P_{ep}\}$  - 单元等效荷载列阵,与作用在单元上的外荷载有关;  $[K_e]$  - 单

元刚度矩阵,按下式计算:  $[K_e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$ 。

集成所有单元的特性,建立整个结构的结点平衡方程。即集成整个结构的整体刚度矩阵和综合等效结点荷载列阵(包括直接结点荷载与等效结点荷载两部分),从而建立结构整体刚度方程为

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}$$

式中  $[K]$  - 结构整体刚度矩阵;  $\{\Delta\}$  - 结构整体位移列阵;  $\{P\}$  - 结构综合等效结点荷载列阵。

非线性有限元问题不同与线性有限元问题的关键是对整体刚度方程组求解方法的不同。结构分析中的材料、几何或其他非线性问题的数值解法,最终都归结为求解非线性代数方程组的问题。数学上对于非线性代数方程组解法,从结构分析的角度来看,目前最常用的是迭代法和增量法,或者是由两者结合起来派生的其他方法。

迭代法是在每次迭代过程中都施加全部荷载,但逐步修改位移和应变,使之满足非线性的应力-应变关系。直接迭代法每一步都要重新计算系统的矩阵,再重新作矩阵分解求其线性解,工作量大。牛顿-拉普森(Newton-Raphson)迭代法,即牛顿法,是通过引入切线刚度矩阵的概念来切线逼近非线性方程组的真实解。这样每一轮迭代就是重新计算切线刚度矩阵并解一个新的线性方程组,为减少计算量可以几步才更换一次切线刚度矩阵。不管是哪种迭代方法都存在收敛性问题,收敛性的不好最终将使有限元分析结果存在很大的误差。另外迭代法也不能用于动态问题和形态与加载路径有关材料,还有其所得到的位移、应力和应变是仅对总荷载而言,不能够描述过程中的形态。

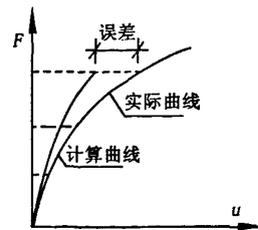


图2 纯粹增量式求解

Fig. 2 Purely increase method solution

增量法就是在外荷载逐级增加的过程中,将荷载划分为许多增量,每次施加一个荷载增量。在一个荷载增量中,假定刚度矩阵是常数,求出结构与之相应的变形和应力状态;在不同的荷载增量中,刚度矩阵可以有不同的数值,并与应力-应

变关系相对应。从而把结构的总体平衡状态划分为各个互相联结的平衡状态,最后的平衡状态就是非线性方程组的解。其实质就是通过对非线性方程组进行变形,把方程组右端变为零,这样方程组就成了一个广义的平衡条件。增量法的主要优点是它能够用于几乎一切类型的非线性形态。但增量法的每一步都可能引入误差,使得后一级增量计算是在前一级已产生误差解的基础上进行,这样就产生了积累误差的问题(图2)。

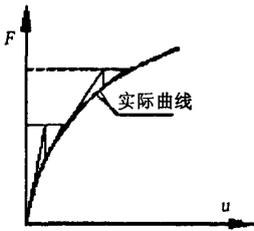


图3 牛顿-拉普森迭代求解

Fig.3 Newton - Lapusen iterative solution

采用由迭代法和增量法结合而成的求解非线性方程组的混合方法,即就是利用增量法的原理将加载过程分段化,在每一个加载段内又采用牛顿-拉普森迭代法,它迫使在每一个载荷增量的末端解达到平衡收敛(在某个容限范围内)。此方法是在纯粹的增量法基础上的一种改进,主要是通过迭代法来克服纯粹的增量法随着每一个载荷增量的增加,其积累误差越来越大,使结果偏离精确解曲线较远(图2)。图3描述了在单自由度非线性分析中牛顿-拉普森平衡迭代的使用,在每次求解前,牛顿-拉普森方法估算出残差矢量,这个矢量是回复力(对应于单元应力的载荷)和所加载荷的差值,然后使用非平衡载荷进行线性求解,且核查收敛性。如果不满足收敛准则,重新估算非平衡载荷,修改刚度矩阵,获得新解。持续这种迭代过程直到问题收敛。采用由迭代法和增量法结合而成的混合方法有效解决了纯粹迭代法和增量法的缺点和不足。

### 3 工程结构算例分析

#### 3.1 模型的建立

采用三维实体单元 SOLID65<sup>[5,6]</sup>建立 T形短肢剪力墙结构体系的有限元模型。试件比例为 1:1。墙肢截面厚度为 200mm,翼缘宽度为 600mm,层高 3.2m。墙肢纵向钢筋配筋率为 1.2%,水平方向配筋率为 0.6%,连梁顶面和底面配筋相同,各为

1.0%,连梁宽度与墙肢同宽。钢筋混凝土采用整体式模型。试验中的钢筋采用 HPB235 普通钢筋,弹性模量  $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 。试验中的混凝土采用 C20、C25、C30、C35、C40、C45 的混凝土。

模拟试验中的试件为 T形短肢剪力墙,试验目的是研究试件在弹塑性状态下的受力特性,是一个三维非线性问题,所以使用迭代法和增量法结合的混合方法,进行空间非线性有限元分析。

在结构的试验模型中,为避免混凝土在加载时由于应力集中而发生压碎破坏,故在试件上方设置了与试件平面尺寸相同的刚性梁,把竖向荷载和水平荷载均施加在刚性梁上,由刚性梁把力传给试件。并认为刚性梁和试件在 x、y 和 z 三个方向上位移协调,无相对滑移。可视为一个物体,只在物体的不同部分分别具有各自的材料特性<sup>[7]</sup>。

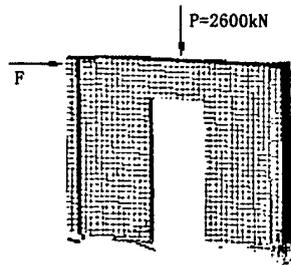


图4 有限元分析模型

Fig.4 Finite element analysis model

#### 3.2 本构关系模型

采用文献[8]中的混凝土受压的本构关系。采用 Von Mises 屈服准则,用于判断混凝土是否进入塑性。混凝土材料采用 W - W 破坏准则,用于检查混凝土开裂和压碎。混凝土开裂模式采用分布式模型,并且认为楼板无限刚性。

在模拟试验时,就变形而言,在楼层范围内,短肢剪力墙的两个端截面由于受平面内刚度极大的上下层楼盖体系的约束,其变形主要为竖向压缩和端截面横向相对侧移,其中竖向荷载引起的压缩变形及应力可视为均匀分布,属于简单静定问题。而构件两端截面相对侧移最能反映构件在实际结构体系中的横向工作状态,可将构件复杂的力学边界条件以简单的位移边界条件替代,剪力墙分析模型的底端被完全约束<sup>[9]</sup>。

#### 3.3 短肢剪力墙模拟试验结果分析

根据图4有限元分析模型,应用 ANSYS 对 T形短肢剪力墙试件进行了两组模拟试验,来分别讨论每种因素对短肢剪力墙弹塑性性能的影响。

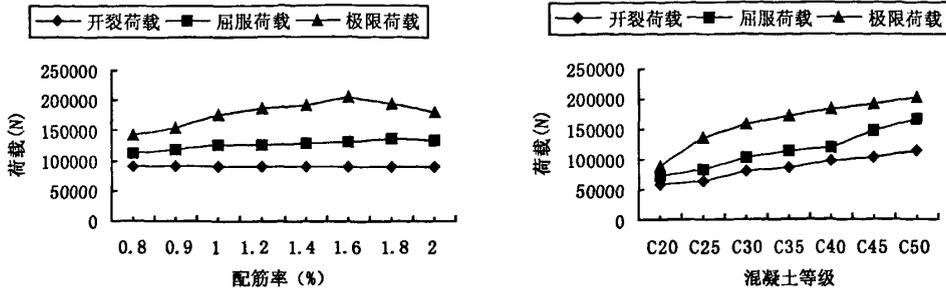


图5 混凝土等级和配筋率对T形短肢剪力墙开裂、极限荷载的影响曲线

Fig.5 The influence curve of different factors to the crack and ultimate bearing load of T-shaped short-leg shear wall

通过仿真分析,得出了配筋率、混凝土等级对T形短肢剪力墙开裂、屈服荷载和极限荷载的影响曲线(图2)。

通过对T形短肢剪力墙试件受力状态分析可知:

1) 试件截面配筋率具有其特殊性,当截面配筋率从0.8%增加到2.0%时,开裂荷载曲线呈水平线分布,大小没有发生变化,仍为89 781N,屈服荷载却保持上升趋势(图5(a))。因为开裂荷载的大小主要由混凝土的极限抗拉强度决定,当增加截面配筋率时,开裂荷载变化不大,即要想只通过提高截面配筋率来提高试件的开裂荷载是不可行的。混凝土发生开裂后,其所受拉应力将转由钢筋承担,因此增加配筋率可增大屈服荷载和极限荷载。但随着钢筋的增加,试件极限荷载却不是一直增加下去,当配筋率达到1.4% - 1.6%之间时,极限荷载达到最大,最大值为206 349N。配筋率再增加,曲线出现了下降趋势。

2) 试件的开裂荷载的大小主要由混凝土的极限抗拉强度所决定,混凝土的极限抗拉强度大,试件开裂荷载、屈服荷载增大,见图5(b)曲线,所以通过提高混凝土的等级的方法来提高试件开裂荷载、屈服荷载是一种有效的方法。但随着混凝土等级的增大,极限荷载增加趋势却逐渐减缓,说明混凝土强度的提高对极限荷载的影响程度在变小。因此,可以通过改变混凝土等级、截面配筋率来提高试件的承载能力。

### 4 结论

1) 有限单元法是在连续体上直接进行近似计

算的一种数值方法,它利用数学逼近的办法对真实物理系统进行模拟。而采用由迭代法和增量法结合而成的空间非线性有限元分析方法,有效解决了纯粹迭代法和增量法的缺点和不足,提高了分析空间非线性问题的精确性。

2) 迭代法和增量法结合而成的混合方法,对工程中的断肢剪力墙结构进行了分析,通过改变混凝土等级、截面配筋率能提高试件的承载能力,但截面配筋率关系到结构的很多方面,选择合理的配筋率和混凝土等级对结构的安全性和经济性都非常重要。

### 参考文献:

- [1] LIU G R. 有限元法实用教程[M]. 长沙:湖南大学出版社,2004.
- [2] 刘天成. 无粘结部分预应力混凝土简支梁非线性有限元分析[D]. 哈尔滨:东北林业大学,2004.
- [3] NILSON A H. Finite element analysis of reinforced concrete, Ph. D. dissertation. division of structural engineering and structural mechanics[D]. University of California, Berkeley, March 1967.
- [4] 朱伯龙,董振祥. 钢筋混凝土非线性分析[M]. 上海:同济大学出版社,1985.
- [5] 龚曙光,谢桂兰. ANSYS 操作命令与参数化编程[M]. 北京:机械工业出版社,2004.
- [6] 博嘉科技. 有限元分析软件 ANSYS 融会与贯通[M]. 北京:水利水电出版社,2002.
- [7] 王建祥,苏枋,胡景龙,等.T形短肢剪力墙静力性能有限元仿真分析[J]. 工程地质学报,2006,14(5):703 - 708.
- [8] GB50010-2002,混凝土结构设计规范[S].

(责任编辑 刘存英)