文章编号:1673-9469(2009)02-0109-02

具有连续变量二阶中立型差分方程的振动性及其有界解

刘志民,孙 静
(河北工程大学 理学院,河北 邯郸 056038)

摘要:研究了一类具有连续变量的二阶中立型差分方程的解的振动性,并给出了有界解振动的几个充分条件。

关键词:中立型差分方程;振动性;连续变量
中图分类号: O175.7 文献标识码:A

Oscillation of second order neutral difference equation with continuous arguments

LIU Zhi-min, SUN Jing
(College of Science, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

Abstract: In this paper, we consider a class of second order neutral difference equations with continuous arguments. Some sufficient conditions for the oscillation of above equations were obtained.

Key words: neutral difference equation; oscillation; continuous arguments

随着医学、生物数学、现代物理等自然科学和边缘学科的发展,出现了许多由差分方程描述的具体数学模型。近年来,关于具有离散变量的差分方程的解的振动性研究比较丰富,而具有连续变量的差分方程振动性的研究还不多。熊万民,刘炳文[1]考虑了具有多变量的一阶中立型差分方程$\triangle(x(t)-x(t-\tau))+\sum_{i=1}^{n}q_i(t)x(t-\sigma_i)=0$的振动性,并给出了振动的几个充分条件。孙书荣,韩振来[2]研究了一类具有连续变量的二阶中立型差分方程$\triangle_\tau^2(x(t)+c(t)x(t-\tau))+p(t)x(t-\sigma)=0, t\geq t_0$的振动性。

本文考虑一类具有连续变量的二阶中立型差分方程

$$\triangle_\tau^2(x(t)-p(t)x(t-\tau))+\sum_{i=1}^{m}q_i(t)x(t-\sigma_i)=0, t\geq t_0 \tag{1}$$

的解的振动性,并给出了其有界解振动的几个充分条件。这里$\triangle_\tau x(t)=x(t+\tau)-x(t)$, $\triangle_\tau^2(x(t))=\triangle_\tau(\triangle_\tau x(t))$, $\tau>0$, $p(t)\in c[t_0,+\infty)$, $q_i(t)\in(0,+\infty)$, $\sigma_i\in(0,+\infty)$, $i=1,2,\cdots,m$。

令 $$z(t)=x(t)-p(t)x(t-\tau) \tag{2}$$

如果方程(1)的解$x(t)$既不最终为正,也不最终为负,那么,就称其为振动的。否则,就称其为非振动的。如果方程(1)的所有解都是振动的,那么方程(1)就称为振动的。

主要结果和证明

引理1 设$x(t)$为方程(1)的最终正解,若$0\leq p(t)<1$,对$t\geq t_0$,则最终有$\triangle_\tau z(t)\geq 0$, $z(t)>0$。

证明 采用反证法。假设其存在最终正解,由方程(1)和(2)得

$$\triangle_\tau^2 z(t)=-\sum_{i=1}^{n}q_i(t)x(t-\sigma_i)\leq 0 \tag{3}$$

所以 $$\triangle_\tau z(t)\geq\triangle_\tau z(t+\tau) \tag{4}$$

且可以证明$\triangle_\tau z(t)\geq 0$, $z(t)>0$。否则,存在常数$t_1>t_0$,有$\triangle_\tau z(t)<0$,因此,当$i\geq 1$时,得

$$\triangle_\tau z(t_1+i\tau)\leq\triangle_\tau z(t_1)$$

将上式两边对i从1到自然数m求和,得

$$z(t_1+(m+1))\tau-z(t_1+\tau)\leq m\triangle_\tau z(t_1)$$

则$\lim\limits_{m\to+\infty}z(t_1+(m+1))\tau=-\infty$。这与$x(t)$的有界性不符,故$\triangle_\tau z(t)\geq 0$。

收稿日期:2009-03-03
基金项目:国家自然科学基金资助(60474019),河北省自然科学基金资助(F2005000482) 特约专稿
作者简介:刘志民(1979-),男,河北临漳人,讲师,从事计算数学理论及其应用研究。

又若 $z(t)>0$,不最终成立,则必有 $t_1^* \geq t_2$,$\mu>0$,使 $z(t_1)\leq -\mu$,从而

$$z(t_1^*+n\tau)\leq -\mu$$

由 $0\leq p(t)<1$ 和(2)有

$$x(t_1^*+n\tau)<x(t_1^*+(n-1)\tau)-\mu,n=1,2,\cdots,m$$

两边对 n 从1到自然数 m 求和,得

$$x(t_1^*+m\tau)<x(t_1^*)-m\mu$$

$$\lim_{m\to+\infty}x(t_1^*+m\tau)=-\infty$$

与 $x>0$ 矛盾。故最终 $z(t)>0$。

引理2 设 $c>0$,$x(t)$为方程(1)的最终正解,若 $-c<p(t)<0$,对 $t\geq t_0$,则最终有$\triangle_\tau z(t)\geq 0$,$z(t)>0$。

证明 同引理1证明,得

$$\triangle_\tau z(t)\geq 0$$

$$z(t)=x(t)-p(t)x(t-\tau)>0$$

故最终有$\triangle_\tau z(t)\geq 0$,$z(t)>0$。

定理1 若 $0\leq p(t)<1$,存在某 $T\geq t_0$,使得对任何 $t\geq T$,有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}q_i(t_2+j\tau)=+\infty$$

成立,则方程(1)振动。

证明 设 $x(t)$是方程(1)的最终正解,由引理1知,$\triangle_\tau z(t)\geq 0$,$z(t)>0$,$z(t)=x(t)-p(t)x(t-\tau)<x(t)$,且存在 $T_1>0$ 及 $a>0$,当 $T>T_1$ 时,有 $0<a\leq x(t-\sigma_i)$成立,故可得$\triangle_\tau^2 z(t)+a\sum_{i=1}^{m}q_i(t)\leq 0$。

取充分大的 $t_2>t_0$,令 $t=t_2+j\tau$,j 是自然数。将上式两边对 j 从1到自然数 n 求和,得

$$\triangle_\tau z(t_2+(n+1)\tau)-\triangle_\tau z(t_2+\tau)+a\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}q_i(t_2+j\tau)\leq 0$$

当 $n\to+\infty$时,有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}q_i(t_2+j\tau)<+\infty$$

成立,故与条件矛盾。因此,定理得证。

定理2 设 $c>0$,若 $0\leq p(t)<c$,若存在某 $T\geq t_0$,当 $i=1$ 时,使得对任何 $t\geq T$,$\sum_{i=1}^{+\infty}q(t+i\tau)=+\infty$成立,则方程(1)振动。

证明 当 $i=1$ 时,方程(1)化为 $\triangle_\tau^2(x(t)-p(t)x(t-\tau))+q(t)x(t-\sigma)=0$,$t\geq t_0$,故定理成立。

定理3 设 $c>0$,若 $-c<p(t)<0$,存在某 $T\geq t_0$,使得对任何 $t\geq T$ 有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}q_1(t_3+j\tau)(1+p(t_3+j\tau-\sigma_i))=+\infty$$

成立,则方程(1)振动。

证明 设 $x(t)$是方程(1)的最终正解,由引理1知,$\triangle_\tau z(t)\geq 0$,$z(t)>0$。且存在 $T_2>0$ 及 $b>0$,当 $T>T_2$ 时,有

$$z(t)=x(t)-p(t)x(t-\tau)>x(t)\geq b>0$$

则有$\triangle_\tau^2 z(t)+\sum_{i=1}^{m}q_i(t)(1+p(t-\sigma_i))<0$

取充分大的 $t_3>t_0$,令 $t=t_3+j\tau$,j 是自然数。于是

$$\triangle_\tau^2 z(t)+b\sum_{i=1}^{m}q_i(t)(1+p(t-\sigma_i))<0$$

将上式两边对 j 从1到自然数 n 求和,得

$$\triangle_\tau^2 z(t_2+(n+1)\tau)-\triangle_\tau z(t_3+\tau)+b\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}q_i(t_3+j\tau)(1+p(t_3+j\tau-\sigma_i))<0$$

当 $n\to+\infty$时,有

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}q_i(t_3+j\tau)(1+p(t_3+j\tau-\sigma_i))<+\infty$$

成立,故与条件矛盾。定理得证。

定理4 若 $-1<p(t)<0$,存在某 $T\geq t_0$,当 $i=1$ 时,使得对任何 $t\geq T$,$\sum_{i=1}^{+\infty}p(t+i\tau)(1-c(t+i\tau-\sigma))=+\infty$成立,则方程(1)振动。

本文参考了文献[4-6]的研究方法,给出了更具一般性的具连续变量的二阶中立性差分方程(1)在 $0\leq p(t)<1$,$-c<p(t)<0$ 时振动的几个充分条件,推广了文献[4]的结论。

参考文献:

[1] XIONG WAN MIN, LIU BING WEN. Oscillation of neutral difference equations with continuous arguments[J]. Natural Science Journal of Hai Nan University, 2002, 20(2): 99-101.

[2] 孙书荣,韩振来.一类具有连续变量的二阶中立型差分方程的振动性[J].工程数学学报,2005,22(5):943-946.

[3] 刘召爽,吴淑慧.连续变量一阶中立型差分方程的振动性[J].河北师范大学学报,2002,26(2):113-117.

[4] 熊万民,王志成.具连续变量的中立型差分方的振动性[J].湖南大学学报,2001,28(1):8-12.

[5] 张玉珠,燕居让. 具有连续变量的差分方程振动性的判据[J].数学学报,1995,38(3):406-411.

[6] 黄 梅,申建华.具连续变量的二阶中立型差分方程[J].湖南师范大学学报(自然科学版),2005,28(3):4-6.

(责任编辑 闫纯有)