

# 基于哈密顿体系的薄壁型钢构件的整体稳定性分析

胡启平,王萌萌

(河北工程大学 土木工程学院,河北 邯郸 056038)

**摘要:**根据薄壁杆件弯扭耦合变形的经典理论,建立轴心压力作用下的薄壁型钢构件的弯扭稳定分析的计算模型,导出拉格朗日函数和拉格朗日方程;并引入对偶变量,将问题导入哈密顿对偶求解体系,建立型钢构件稳定问题的哈密顿正则方程,最后利用混合能的精细积分法及二分法求出临界荷载。本方法思路清晰,计算精度高,可推广应用于变截面构件的稳定性分析。

**关键词:**冷弯薄壁型钢构件;精细积分法;稳定性;临界荷载

**中图分类号:** TU331

**文献标识码:** A

## The analysis for overall stability of cold - formed thin wall steel members using Hamiltonian theory

HU Qi - ping, WANG Meng - meng

(College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Handan, Hebei 056038, China)

**Abstract:** In this paper, a calculation model of Cold - formed thin - wall steel which under the axial compression load was set up by using the coupled bending - torsional deformation classical theory, and then the Lagrange function and the Lagrange equations were got; A Hamiltonian functions was constituted by introducing dual variables, the use of Hamiltonian mechanics led the question from the Lagrange system to the Hamilton dual system, then the Hamilton's canonical equations which were used to analyze stability of thin - walled bar were established. The precise numerical value of critical load could be achieved according to the using of dichotomy theory and precise integration method. This method has higher precision and the calculating process is simple and clean. This method can be extended to apply to study the stability of the Variable Cross - section.

**Key words:** cold - formed thin walled members; precise integration method; stability; critical load

薄壁型钢构件具有自重轻、强度高、外形尺寸精度高等优点,但其长细比较大,在轴心压力作用下构件可能发生屈曲而显著降低其极限承载力;也可能由于翘曲变形的影响而使构件过早发生强度破坏<sup>[1-3]</sup>。本文基于哈密顿理论,进行分析求解,为薄壁型钢构件整体稳定性计算提供了新的方法。

### 1 基本假定

以一个等断面薄壁型钢构件为例,当轴心压力逐渐增大到某一临近值时,构件开始弯曲或者弯曲扭转而丧失稳定性。断面及坐标系如图1所示,其中 $O$ 为形心, $x$ 轴、 $y$ 轴分别为断面的形心主

惯性轴, $z$ 轴通过断面形心且沿杆件长度方向, $s$ 为断面中心线的自然坐标。

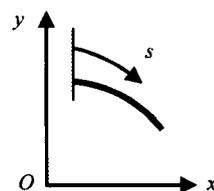


图1 断面和坐标系

Fig.1 Section and coordinate system

基本假定:

(1)忽略沿曲线坐标 $s$ 方向的环向应力 $\sigma_s$ 和法向应力 $\sigma_n$ 的影响。

(2) 库尔布鲁纳-哈丁对纵向翘曲位移的假定, 杆件双向弯曲时的平截面假定以及符拉索夫刚周边假定, 但不能忽略剪切变形对构件的影响。

在冷弯薄壁型钢构件的弯扭耦合问题中, 考虑杆件在  $xoz$  平面内的弯曲、 $yo z$  平面内的弯曲及绕  $z$  轴的扭角, 忽略在轴向荷载作用下的轴向变形, 得到断面中线上任意点的纵向位移和切向位移分别为

$$w(s, z) = y(s)\theta_x(z) - x(s)\theta_y(z) - \omega(s)\theta(z) \quad (1)$$

$$\xi(s, z) = [v_0(z) + x_s\varphi(z)] \frac{dy(s)}{ds} + [u_0(z) - y_s\varphi(z)] \frac{dx(s)}{ds} + h(s)\varphi(z) \quad (2)$$

式中:  $u_0(z)$ 、 $v_0(z)$  - 断面形心沿  $x$ 、 $y$  轴方向的位移;  $\theta_x(z)$ 、 $\theta_y(z)$  - 断面绕  $x$  轴、 $y$  轴的转角;  $x_s$ 、 $y_s$  - 扭心的坐标;  $\varphi(z)$  - 扭角;  $\theta(z)$  - 翘曲函数;  $x(s)$ 、 $y(s)$  - 断面中线上任意点的坐标;  $h(s)$  - 断面中心线上任意点切线到扭心的距离;  $\omega(s)$  - 以扭心为极点的扇性坐标。

## 2 构件的总势能

轴心压力  $P$  所做的功为

$$W = \frac{1}{2} \iint_A \left[ \int_0^l \frac{P}{A} [(\dot{u}_0 - y\dot{\varphi})^2 + (\dot{v}_0 - x\dot{\varphi})^2] dz \right] dA$$

$$i_0^2 = \frac{I_x + I_y}{A} \quad (3)$$

总势能  $\Pi$  等于

$$\Pi = \int_0^l \left[ \iint_A \left( \frac{1}{2} E \varepsilon_z^2 + \frac{1}{2} G \gamma_{xz}^2 \right) dA + \frac{1}{2} G J_s \dot{\varphi}^2 \right] dz - \frac{1}{2} P \int_0^l (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + i_0^2 \dot{\varphi}^2) dz \quad (4)$$

## 3 拉格朗日函数

令  $q = [u_0, v_0, \varphi, \theta_x, \theta_y, \theta]^T$ ,  $g = [q_x, q_y, m, m_x, m_y, B]^T$ , 拉格朗日函数可以表示成矩阵形式

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T K_{22} \dot{q} + \dot{q}^T K_{21} q + \frac{1}{2} q^T K_{11} q - g^T q$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} K_{22}^1 & 0 \\ 0 & K_{22}^2 \end{bmatrix}_{6 \times 6}; K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & K_{21}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 6};$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}; \quad (5)$$

其中

$$K_{22}^2 = \begin{bmatrix} EI_x & & \\ & EI_y & \\ & & EI_\omega \end{bmatrix},$$

$$K_{11}^1 = \begin{bmatrix} GA_{yy} & -GA_{xy} & -GS_{xy} \\ -GA_{xy} & GA_{xx} & GS_{xx} \\ -GA_{xy} & GS_{xx} & G(I_p - J_B) \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^1 = \begin{bmatrix} GA_{xx} - P & GA_{xy} \\ GA_{xy} & GA_{yy} - P \\ G(A_{xy}x_s - A_{xx}y_s + S_{xx}) & G(A_{yy}x_s - A_{xy}x_s - S_{xy}) \\ G(A_{xy}x_s - A_{xx}y_s + S_{xx}) \\ G(A_{yy}x_s - A_{xy}y_s + S_{xy}) \\ GJ - Pi_0^2 \end{bmatrix}$$

$$K = I_p + J_s + A_{xx}y_s^2 + A_{yy}x_s^2 - 2A_{xy}x_sy_s + 2S_{xy}x_s - 2S_{xx}y_s$$

$$K_{21}^1 = \begin{bmatrix} GA_{xy} & -GA_{xx} \\ GA_{yy} & -GA_{xy} \\ G(A_{yy}x_s - A_{xy}y_s + S_{xy}) & G(A_{xx}y_s - A_{xy}x_s - S_{xx}) \\ -GS_{xx} \\ -GS_{xy} \\ G(J_B - I_p + S_{xx}y_s - S_{xy}x_s) \end{bmatrix}$$

式中:  $A$  - 杆件断面面积;  $I_x$ 、 $I_y$  - 绕  $x$  轴、 $y$  轴的惯性矩;  $I_\omega$  - 扇性惯性矩;  $I_p$  - 绕扭心的极惯性矩;  $J_B$  - 与布雷特剪应力对应的扭转惯性矩;  $J_s$  - 与圣维南剪应力对应的扭转惯性矩;  $A_{xx}$ 、 $A_{yy}$  -  $x$  与  $y$  方向的剪切面积;  $A_{xy}$  - 混合剪切面积;  $S_{xx}$ 、 $S_{xy}$  -  $x$  与  $y$  方向的剪切静矩。

引入广义位移  $q$  的对偶变量  $p$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = K_{22} \dot{q} + K_{21} q \quad (6)$$

导出构件的哈密顿函数

$$H(q, p) = p^T A q - \frac{1}{2} q^T B q + \frac{1}{2} p^T D p + h_q^T p - h_p^T q \quad (7)$$

式中:  $A = -K_{22}^{-1} K_{21}$ ;  $B = K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}$ ;  $D = K_{22}^{-1}$ 。从而导出相应的哈密顿正则方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = A q + D p + h_q$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = B q + A^T p + h_p \quad (8)$$

$$\text{令 } v = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}, \text{ 哈密顿矩阵 } H = \begin{bmatrix} A & D \\ B & -A^T \end{bmatrix}, H =$$

$\begin{bmatrix} h_q \\ h_p \end{bmatrix}$ , 则

$$\dot{v} = H v + h \quad (9)$$

## 4 临界荷载的数值计算

以一端固定、一端自由的边界条件为例, 应用

两端边值的精细积分法和二分法<sup>[4-8]</sup>进行求解。引入混合能矩阵,通过混合能矩阵与力的关系就可得到力的数值解,即可得:

$$q_b = Fq_a + Gp_b \quad p_a = -Qq_a + F^T p_b \quad (10)$$

固定端广义位移  $q_b = 0$ , 化简(10)式可得:

$$(Q + F^T G^{-1} F) q_a = 0 \quad (11)$$

式中: $F$ 、 $G$ 、 $Q$  - 构件的混和能矩阵,可由  $A$ 、 $B$ 、 $D$  通过精细积分法求得; $p_b$ 、 $q_b$  和  $p_a$ 、 $q_a$  - 构件固定端和自由端的广义力及广义位移。

自由端广义位移  $q_a$  不为零,要使方程(11)有非零解,矩阵  $(Q + F^T G^{-1} F)$  的行列式值须等于零。用二分法求解临界荷载  $P$ ,求解过程采用 MATLAB 数值计算软件编程计算。

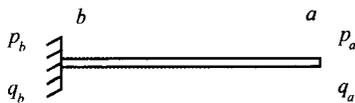


图2 构件计算模型

Fig. 2 Component calculation model

### 5 算例验证

分别选取开口薄壁型、闭口薄壁型钢构件进行分析。

算例1:一槽形的开口冷弯薄壁构件,尺寸如图3(a)所示。构件一端固定,一端自由,材料的弹性模量  $E = 1 \times 10^6 / \text{m}^2$ ,泊松比  $\mu = 0.25$ ,壁厚  $t = 0.4 \text{ m}$ ,杆长为  $l$ 。

利用 MATLAB 构件,计算槽形薄壁型钢构件的临界荷载,将本文计算结果与文献<sup>[2,9-11]</sup>进行对比(表1)。

表1 槽形冷弯薄壁型钢构件的临界荷载

Tab. 1 The ultimate load of cold - formed thin - walled steel component in channel section kN

算法	文献[9]	文献[10]	文献[11]	文献[2]	本文计算结果
$l = 60 \text{ m}$	6.635 2	6.684 0	6.824 3	6.626 6	6.649 2
$l = 80 \text{ m}$	3.745 3	3.760 0	3.895 0	3.741 6	3.748 5

算例2:断面形式为箱形的闭口薄壁构件,尺寸如图3(b)所示。一端固定,一端自由,材料弹性模量  $E = 1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ ,泊松比  $\mu = 0.25$ ,壁厚  $t = 0.2 \text{ m}$ ,杆长为  $l = 100 \text{ m}$ 。

利用 MATLAB 数值计算程序,得到箱型薄壁型钢构件的临界荷载为 465 428.467 kN,文献[9]的计算结果为 459 696.996 kN,文献[3]的计算结果为 461 897.486 kN。

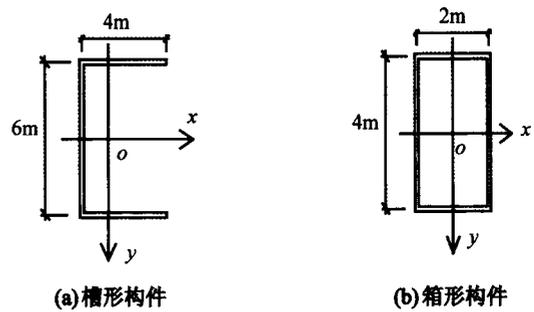


图3 算例构件尺寸图

Fig. 3 The example size chart

### 6 结论

算例结果可以看出,无论是开口薄壁构件还是闭口薄壁构件,基于哈密顿体系得到的计算结果与原文献结果都比较接近。表明本算法可用于开口、闭口及开闭口混合断面薄壁构件的稳定性研究,具有较高的精度。

### 参考文献:

- [1] RAZZAQ Z. Biaxial Bending test with or without torsion [J]. ASCE, ST 11, 1979.
- [2] 王全凤, 李华煜. 任意截面形状薄壁压杆的稳定[J]. 土木工程学报, 1996, 29(6): 14 - 24.
- [3] 包世华, 周坚. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社. 2007.
- [4] 胡启平, 董宝峰, 吕 铭. 基于哈密顿理论的薄壁杆件稳定性分析[J]. 四川建筑科学研究, 2011, 37(4): 26 - 29.
- [5] 胡启平, 王 颖. 框剪结构动力时程分析的精细积分法[J]. 河北工程大学学报: 自然科学版, 2011, 28(1): 1 - 9.
- [6] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [7] 胡启平, 李张苗, 侯瑞珀. 铁摩辛柯梁弯曲问题的对偶求解体系[J]. 河北工程大学学报: 自然科学版, 2006, 23(3): 1 - 4.
- [8] 胡启平, 刘 鹏, 吕 铭. 考虑部分楼板变形时框 - 剪结构的协同分析[J]. 河北工程大学学报: 自然科学版, 2009, 26(3): 4 - 7.
- [9] 辛克贵, 王书纯. 考虑剪切变形的薄壁杆件稳定分析[J]. 工程力学, 2000, 17(1): 47 - 56.
- [10] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability [M]. New York: Mc Graw - Hill Book Co., 1961.
- [11] LASHKARI M. COSMOS M user guide [M]. USA: Structural Research and Analysis Corporation, 1989.

(责任编辑 马立)