

基于最小二乘支持向量机岩土本构模型的有限元分析

杨 春

(河南理工大学 土木学院,河南 焦作,454000)

摘要:基于最小二乘支持向量机理论建立了岩土本构模型,并结合有限元理论分析了 ABAQUS 在求解非线性问题的基本原理和具体过程。利用 ABAQUS 中 UMAT 接口将最小二乘支持向量机岩土本构模型用于一隧道工程开挖实例分析,结果表明其最小二乘支持向量机本构模型用于有限元分析的可行性和优越性。

关键词:最小二乘支持向量机;岩土本构模型;ABAQUS;有限元分析

中图分类号: TU452

文献标识码: A

LSSVM - based constitutive model of geomaterial used in element analysis

YANG Chun

(School of Civil Engineering, Henan Polytechnical University, Henan Jiaozuo 454000, China)

Abstract: Based on least square support vector machine, the constitutive model was established and the basic principle and the specific process of ABAQUS in solving the non - linear problems were analyzed by combining with finite element theory. An example of tunnel excavation was analyzed by using LSSVM constitutive model through the UMAT of ABAQUS. The results show that LSSVM - based constitutive model is feasible and has some advantages in element analysis.

Key words: least square support vector machine (LSSVM); geomaterial constitutive model; ABAQUS; element analysis

有限元法经历了几十年的发展,在诸多领域(如土木工程、机械工程等)都取得了显为人知的成果。D. V. Griffith 等^[1-4]编写了基于岩土边坡工程的有限元程序并对其进行了分析,黄向京等^[5]将有限元强度折减法应用到加筋土陡坡工程中,分析了不同的计算模型,并取得了理想的结果。陈恩利等^[6]利用 ADINA 有限元软件对某尾矿坝进行了静力稳定性分析,克服了极限平衡方法的不足,准确模拟了边坡的破坏过程和实际滑动面。郑颖人^[7]等利用极限分析有限元法应用到边坡工程、地基工程、地下工程及隧道中,用塑性应变剪切带准确得到了临界滑动面并且能够求得安全系数,魏运均等^[8]采用 ANSYS 有限元软件分析了预应力锚杆在深基坑中粘结应力的分布规律。上述有限元分析都是结合传统的岩土本构模型(如, M - C 模型, D - P 模型等)进行的分析,虽然传统的岩土本构模型有着坚实的理论基础,解

决了一些实际工程问题,但它们都是基于一些假设条件而建立起来的且通常有着其特定的适用范围,在实际的应用中受到了一定的限制。另外,岩土材料有着极其复杂力学特性,特别是一些大型的岩土工程传统的岩土本构模型就不能准确的进行分析其特性。针对上述问题,本文利用最小二乘支持向量机理论建立了岩土本构模型并应用到隧道工程的实例分析中,克服了传统岩土本构模型在有限元分析中的积分过程,减小了误差。

1 岩土本构模型

最小二乘支持向量机是对支持向量机的一种改进,其核心思想和支持向量机都是基于统计学习理论和 VC 维理论建立的。最小二乘支持向量机在保持支持向量机的特点下还有着其自身独特的优势:(1)将不等式约束改为等式约束。(2)将求解凸二次规划问题改为求解线性方程组。(3)

将经验风险的一次方改为二次方。

最小二乘支持向量机模型^[9]最终可归为

$$y(x) = \sum_{k=1}^n a_k K(x, x_k) + b \quad (1)$$

式中 n - 样本数; b - 阈值; a_k - 拉格良日乘子。

$$K(x, x_k) = \exp \left\{ -\frac{|x - x_k|^2}{2\delta^2} \right\} \quad (2)$$

为核函数。

根据式(1)最小二乘支持向量机模型,考虑到岩土材料复杂的力学特性和应力路径的影响,建立如下的最小二乘支持向量机岩土本构模型。

$${}^{n+1}\sigma = LSSVM({}^{n+1}\varepsilon, {}^n\sigma, \varepsilon, {}^{n-1}\sigma, {}^{n-1}\varepsilon) \quad (3)$$

其具体形式为

$${}^{n+1}\sigma_i = \sum_{k=1}^n a_k K(x_{n+1}, x_k) + b_i \quad i=1, \dots, 6 \quad (4)$$

其中

$${}^{n+1}\sigma = [{}^{n+1}\sigma_1, {}^{n+1}\sigma_2, {}^{n+1}\sigma_3, {}^{n+1}\sigma_4, {}^{n+1}\sigma_5, {}^{n+1}\sigma_6];$$

$${}^{n+1}\varepsilon = [{}^{n+1}\varepsilon_1, {}^{n+1}\varepsilon_2, {}^{n+1}\varepsilon_3, {}^{n+1}\varepsilon_4, {}^{n+1}\varepsilon_5, {}^{n+1}\varepsilon_6];$$

$${}^n\sigma = [{}^n\sigma_1, {}^n\sigma_2, {}^n\sigma_3, {}^n\sigma_4, {}^n\sigma_5, {}^n\sigma_6];$$

$${}^n\varepsilon = [{}^n\varepsilon_1, {}^n\varepsilon_2, {}^n\varepsilon_3, {}^n\varepsilon_4, {}^n\varepsilon_5, {}^n\varepsilon_6];$$

$${}^{n-1}\sigma = [{}^{n-1}\sigma_1, {}^{n-1}\sigma_2, {}^{n-1}\sigma_3, {}^{n-1}\sigma_4, {}^{n-1}\sigma_5, {}^{n-1}\sigma_6];$$

$${}^{n-1}\varepsilon = [{}^{n-1}\varepsilon_1, {}^{n-1}\varepsilon_2, {}^{n-1}\varepsilon_3, {}^{n-1}\varepsilon_4, {}^{n-1}\varepsilon_5, {}^{n-1}\varepsilon_6];$$

$$x_k = [{}^k\varepsilon_1, \dots, {}^k\varepsilon_6, {}^{k-1}\sigma_1, \dots, {}^{k-1}\sigma_6, {}^{k-1}\varepsilon_1, \dots, {}^{k-1}\varepsilon_6, {}^{k-2}\sigma_1, \dots, {}^{k-2}\sigma_6, {}^{k-2}\varepsilon_1, \dots, {}^{k-2}\varepsilon_6];$$

$$x_{n+1} = [{}^{n+1}\varepsilon_1, \dots, {}^{n+1}\varepsilon_6, {}^n\sigma_1, \dots, {}^n\sigma_6, {}^n\varepsilon_1, \dots, {}^n\varepsilon_6, {}^{n-1}\sigma_1, \dots, {}^{n-1}\sigma_6, {}^{n-1}\varepsilon_1, \dots, {}^{n-1}\varepsilon_6];$$

$$k(x_{n+1}, x_k) = \exp \left\{ -\frac{[x_{n+1} - x_k]^2}{2\delta_j^2} \right\} = \exp$$

$$\left\{ -\sum_{i=1}^6 ({}^{n+1}\varepsilon_i - {}^k\varepsilon_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^n\sigma_i - {}^{k-1}\sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^n\varepsilon_i - {}^{k-1}\varepsilon_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^{n-1}\sigma_i - {}^{k-2}\sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^{n-1}\varepsilon_i - {}^{k-2}\varepsilon_i)^2 \right\} / 2\delta_j^2 \quad l=1, \dots, 6。$$

在对岩土工程工程问题进行有限元分析时,在每一荷载增量结束时都要更新雅可比矩阵、应力、应变和相应的变量等,通常材料刚度矩阵(雅可比矩阵)定义为

$$\frac{\partial \Delta^{n+1}\sigma_i}{\partial \Delta^{n+1}\varepsilon_j} = \frac{\partial ({}^{n+1}\sigma_i - {}^n\sigma_i)}{\partial \Delta^{n+1}\varepsilon_j} = \frac{\partial {}^{n+1}\sigma_i}{\partial \Delta^{n+1}\varepsilon_j} \quad (5)$$

其具体推导过程为

$$\frac{\partial {}^{n+1}\sigma_i}{\partial \Delta^{n+1}\varepsilon_j} = \frac{\partial {}^{n+1}\sigma_i}{\partial K(x, x_k)} \frac{\partial K(x_{n+1}, x_k)}{\partial \Delta^{n+1}\varepsilon_j} = \sum_{k=1}^n a_k K(x_{n+1},$$

$$x_k) \left(-\frac{1}{2\delta_j^2} \right) \cdot 2({}^{n+1}\varepsilon_j - {}^k\varepsilon_j) \cdot 1 = -\frac{1}{\delta_j^2} \sum_{k=1}^n a_k \cdot e \left\{ -\sum_{i=1}^6$$

$$({}^{n+1}\varepsilon_i - {}^k\varepsilon_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^n\sigma_i - {}^{k-1}\sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^n\varepsilon_i - {}^{k-1}\varepsilon_i)^2 +$$

$$\sum_{i=1}^6 ({}^{n-1}\sigma_i - {}^{k-2}\sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^{n-1}\varepsilon_i - {}^{k-2}\varepsilon_i)^2 \right\} / 2\delta_j^2 \cdot ({}^{n+1}\varepsilon_j - {}^k\varepsilon_j) \quad (6)$$

所以,雅可比矩阵为

$$\frac{\partial {}^{n+1}\sigma_i}{\partial \Delta^{n+1}\varepsilon_j} = -\frac{1}{\delta_j^2} \sum_{k=1}^n a_k \cdot e \left\{ -\sum_{i=1}^6 ({}^{n+1}\varepsilon_i - {}^k\varepsilon_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^n\sigma_i - {}^{k-1}\sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^n\varepsilon_i - {}^{k-1}\varepsilon_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^{n-1}\sigma_i - {}^{k-2}\sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^6 ({}^{n-1}\varepsilon_i - {}^{k-2}\varepsilon_i)^2 \right\} / 2\delta_j^2 \cdot ({}^{n+1}\varepsilon_j - {}^k\varepsilon_j) \quad (7)$$

从上述的推导过程可以看出,式(5)中的雅可比矩阵可以从式(4)中的最小二乘支持向量机岩土本构模型中得到。在有限元分析的过程中,在增量步结束之后更新雅可比矩阵,并以此来组装总体刚度矩阵,即力对位移的梯度。事实上,在计算过程中要想收敛快,位移增量就应沿着梯度方向变化,可见,雅可比矩阵对计算的收敛速度有着很大的影响,但却不影响计算结果的准确性,因为计算结果的准确性唯一判断标准是内力和外力的平衡,当然,如果计算不收敛自然也得不到准确的结果。

2 有限元分析原理

在用 ABAQUS 软件来求解非线性问题时,是根据牛顿-辛普森(Newton-Raphson)方法来进行求解的,在计算的过程中荷载不是一次性加上去的,而是结合软件内部的算法将荷载分成许多微小增量,在每一荷载增量步中都利用牛顿-辛普森方法进行迭代求解,直至迭代误差满足要求才进行下一荷载增量步的计算,具体过程如下:

设第 n 步荷载增量的第 j 次迭代

$$R_n = R_{n-1} + \Delta R_n \quad (8)$$

$$\Phi_n^{j-1} = K_n^{j-1} \delta \alpha_n^j = R_n - P_n^{j-1} \quad (9)$$

$$P_n^{j-1} = \sum_j B^T \sigma^n \quad j-1 \text{ LSSVM } (\varepsilon_n^{j-1}, \sigma_n^{j-2}, \varepsilon_n^{j-2}, \sigma_n^{j-3}, \varepsilon_n^{j-3}, \dots) dv \quad (10)$$

$$\Delta \alpha_n^j = \Delta \alpha_n^{j-1} + \delta \alpha_n^j \quad (11)$$

$$\delta \varepsilon_n^j = B \delta \alpha_n^j \quad (12)$$

$$\Delta \varepsilon_n^j = \Delta \varepsilon_n^{j-1} + \delta \varepsilon_n^j \quad (13)$$

$$\varepsilon_n^j = \varepsilon_n^{j-1} + \Delta \varepsilon_n^j \quad (14)$$

$$\sigma_n^j = \sigma_n^j \text{ LSSVM } (\varepsilon_n^j, \sigma_n^{j-1}, \varepsilon_n^{j-1}, \sigma_n^{j-2}, \varepsilon_n^{j-2}, \dots) \quad (15)$$

$$\Phi_n^j = R_n - P_n^j \quad (16)$$

$$P_n^j = \sum_j B^T \sigma^j \text{ LSSVM } (\varepsilon_n^j, \sigma_n^{j-1}, \varepsilon_n^{j-1}, \sigma_n^{j-2}, \varepsilon_n^{j-2}, \dots) dv \quad (17)$$

$$a_n = a_{n-1} + \Delta a_n^j \quad (18)$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^j \quad (19)$$

$$\sigma_n = \sigma_n^j \quad (20)$$

式中 R_n - 第 n 步的荷载增量; ΔR_n - 第 n 步的荷载增量步; K - 切线刚度矩阵; Φ - 迭代过程中的残差; P - 内部作用力; δa_n^j - n 次荷载增量步中第 j 次迭代步中位移增量; σ_n^{j-1} LSSVM($\varepsilon_n^{j-1}, \sigma_n^{j-2}, \varepsilon_n^{j-2}, \sigma_n^{j-3}, \varepsilon_n^{j-3}$) - 由最小二乘支持向量机本构模型得到的应力; $\varepsilon_n^{j-1}, \sigma_n^{j-2}, \varepsilon_n^{j-2}, \sigma_n^{j-3}, \varepsilon_n^{j-3}$ - 第 n 次荷载增量步中第 $j-1$ 次, $j-2$ 次, $j-3$ 次得到的应力、应变; B - 应变转换矩阵; Δa_n^j - 第 j 次迭代得到的第 n 次荷载增量步的位移增量; $\Delta \varepsilon_n^j$ - 第 j 次迭代得到的第 n 次荷载增量步的位移增量; $\delta \varepsilon_n^j$ - 第 n 次荷载增量步中第 j 次迭代步中应变增量; ε_n^j - 第 n 次荷载增量步结束时更新的应变; σ_n^j - 第 n 次荷载增量步结束时更新的应力; a_n - 第 n 次荷载增量步结束时更新的位移。

式(8)~式(17)的 Newton-Raphson 迭代直到残差 Φ 小于容许误差为止, 否则将一直迭代下去, 当满足收敛条件时, 更新应变、应力、位移等变量。

从上述分析中可以看出, ABAQUS 在求解非线性问题时是将每一荷载增量都分解为有限个线性问题, 进而归结为对线性方程的求解, 式(8)~式(17)的迭代原理见图 1。通常, 岩土工程问题都是高度非线性的, 所以求解起来比线性问题耗费的计算量大的多且付出的时间代价也较大。

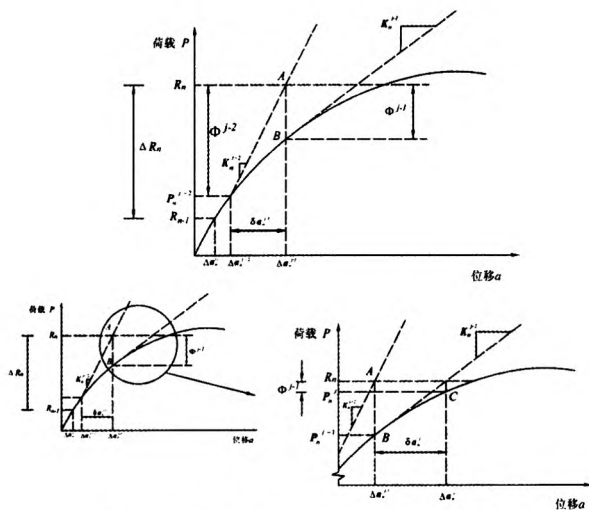


图1 Newton-Raphson求解非线性问题原理

Fig.1 The principle of Newton-Raphson solving non-linear problems

从上述分析中可以看出, ABAQUS 在求解非线性问题时是将每一荷载增量都分解为有限线性

问题, 进而归结为对线性方程的求解。通常, 岩土工程问题都是高度非线性的, 所以求解起来比线性问题耗费的计算量大的多且付出的时间代价也较大。

3 实例分析

本文利用 FORTRAN 言语编写了最小二乘支持向量机岩土本构模型子程序, 利用 ABAQUS 中的 UMAT 子程序接口对一隧道工程开挖实例^[10-11]进行了数值模拟, 并与 ABAQUS 中 E- ν 模型模拟的结果进行了对比分析。隧道半径为 4 m, 埋深为 16 m, 土体单元为 60 m $\times$ 60 m, 土体采用弹性模型模拟, 弹性模量 $E = 200$ MPa, $\nu = 0.2$, 土体重度 $\gamma = 20$ kN/m³。

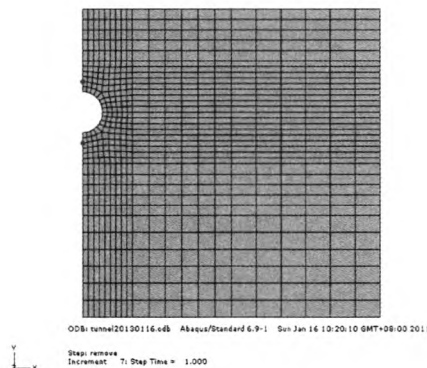


图2 隧道模型网格划分示意图

Fig.2 Schematic diagram of meshing the tunnel model

为了精确的反映隧道在开挖后其周边的墙体的变形及应力、应变等变化, 在隧道周边划分的网格适当加密, 其网格划分的最终结果见图 2。从开挖后的结果中选取隧道顶部 A 点和底部 B 点来分析其位移和应力的变化情况, 并与最小二乘支持向量机岩土本构模型的模拟结果对比分析, 其结果见图 3、图 4、图 5、图 6。

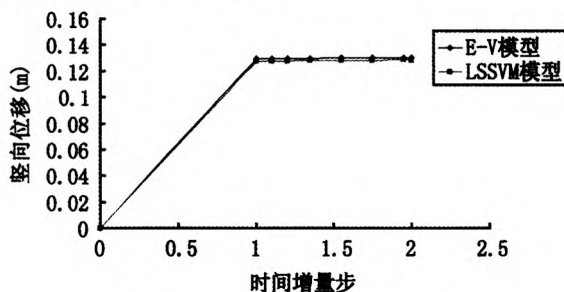


图3 隧道开挖后顶部A点竖向位移

Fig.3 A point vertical displacement of the tunnel excavated

在模拟的过程中, 建立 Geostatic 分析步, 以此

来平衡地应力,图3-图6中时间增量步为1之前的部分为平衡地应力的过程,其后为隧道开挖的过程直至时间增量步为2时开挖结束。由于在ABAQUS中规定拉为正压为负,故图4和图6中的应力为负值。

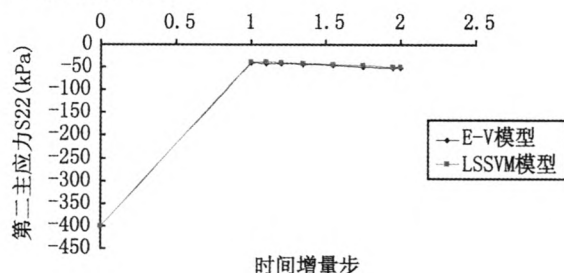


图4 隧道顶部开挖后A点应力

Fig. 4 A point stress of the tunnel excavated

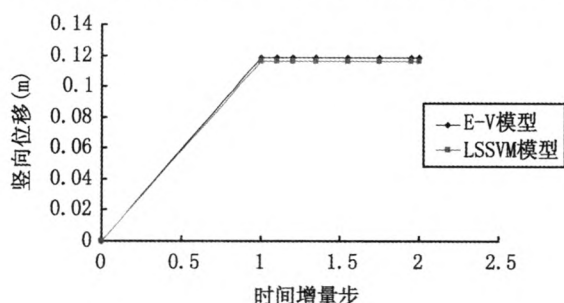


图5 隧道开挖后底部B点竖向位移

Fig. 5 B point vertical displacement of the tunnel excavated

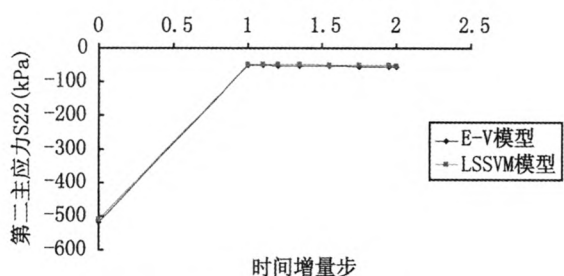


图6 隧道开挖后底部B点应力

Fig. 6 B point stress of the tunnel excavated

从上述图中对比分析可以看出,用最小二乘支持向量机岩土本构模型得到的结果与ABAQUS中E- ν 本构模型得到的结果基本一致,误差都在5%以内,这就充分表明本文建立的最小二乘支持向量机岩土本构模型用于有限元分析的可行性和准确性。

4 结语

本文建立的最小二乘支持向量机岩土本构模型用于分析隧道开挖问题,验证了其用于有限元分析的可行性和正确性;最小二乘支持向量机岩土本构模型有着自身的优良特性,在用于有限元分析时有着广阔的前景。

参考文献:

- [1] 郑颖人, 赵尚毅, 邓楚键, 等. 有限元极限分析法发展及其在岩土工程中的应用[J]. 中国工程科学, 2006, 8(12): 39-61.
- [2] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by Finite elements [J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387-403.
- [3] LANE P A, GRIFFITHS D V. Assessment of stability of slopes under drawdown condition [J]. Geotech Geoenviron Eng ASCE, 2000, 126(5): 443-450.
- [4] SMITH I M, GRIFFITHS D V. Programming the finite element method, 3rd edition [M]. New York: John Wiley and Sons Chichester, 1998.
- [5] 黄向京, 许桂林, 陈润夏. 有限元强度折减法在加筋格宾陡坡支护结构中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(2): 3916-3922.
- [6] 陈恩利, 马春福, 司春棣. 强度折减有限元法在尾矿坝稳定计算中的应用[J]. 水利水电技术, 2009, 40(7): 45-48.
- [7] 郑颖人, 赵尚毅. 岩土工程极限分析有限元法及其应用[J]. 土木工程学报, 2005, 38(1): 91-104.
- [8] 魏运均, 杜晓克. 预应力锚杆有限元分析在深基坑中的应用[J]. 山西建筑, 2011, 37(35): 79-80.
- [9] SAMUI PIJUSH, SITHARAM T G. Least-square support vector machine applied to settlement of shallow foundations on cohesionless soils [J]. Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 2008(32): 2033-2043.
- [10] 陈卫忠, 伍国军, 贾善坡. ABAQUS在隧道及地下工程中的应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2010.
- [11] 费康, 张建伟. ABAQUS在岩土工程中的应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.

(责任编辑 刘存英)