文章编号:1673-9469(2013)03-0067-04　　doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2013.03.017

基于不动点理论的改进遗传算法及其应用

李 群,高瑞贞,张京军
(河北工程大学 信息与电气工程学院,河北 邯郸 056038)

摘要:针对遗传算法的遗传效率问题,引入不动点理论的"剖分-标号-剖分"思想,通过寻找全标单纯形来对最优解进行定位,对全标单纯形再次剖分,寻找其内部的全标单纯形,使最优解得范围进一步缩小。遗传算法按相对适应度大小随机选取全标单纯形内的点作为初始化群体,极大地提高了遗传算法的效率。将遗传变异区间化,锁定在全标单纯形内或附近单纯形,使得最优解的精确度也得到极大地提高。

关键词:遗传算法;不动点;剖分;全标单纯形;整数标号
中图分类号:TP399　　**文献标识码**:A

Improved genetic algorithm based on fixed point theory and its application in multi-dimensional space

LI Qun, GAO Rui-zhen, ZHANG Jing-jun
(School of Information Science and Electrical Engineering, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China)

Abstract: The fixed point theory of the "split - label - split" idea is introduced into the genetic algorithms to solve genetic efficiency, locking the optimal solution looking for completely labeled simplexes, finding their internal completely labeled simplexes in the resubdivision of simplexes in the previous step make the optimal solution regions further reduced. Genetic Algorithms randomly select points in the completely labeled simplexes as the initial group in the relative size of the fitness, which greatly improved the efficiency of genetic algorithm. Genetic variation occurred in completely labeled simplexes or near them, which makes the precision of the optimal solution greatly improved.

Key words: genetic algorithm; fixed point; Split; completely labeled simplexes; integer label

遗传算法[1]是一种求解全局最优问题的随机搜索算法,其中函数优化问题是遗传算法的一个最广泛的应用领域。函数优化作为对遗传算法性能进行评价的常用方式,目前构造出了各种各样复杂形式的测试函数:连续函数和离散函数、凸函数和凹函数、低维函数和高维函数、单峰函数和多峰函数等。针对求解多峰函数的全局最优解问题,文献[2]提出了一种改进的区间-遗传算法,每次迭代中区间算法为遗传算法的搜索提供可靠区域,同时遗传算法为区间算法的区间分裂提供了一个方向、为区间删除给出了问题全局最优解的一个上界,使得遗传效率大大提高,但随着问题维数的增加,求解时间明显增加;文献[3-5]将小生境技术引入了遗传算法,通过反映个体之间的相似程度的共享函数来调整种群中各个个体的适应度,以维护群体的多样性,从而在这以后的群体进化过程中,算法能够依据这个调整后的新适应度来进行选择运算,对保持种群多样性和引导种群进化方面具有重要作用,但是此方法子群体数的选取需要事先知道问题的最优解个数,小生境技术不能充分保证种群分布的概率稳定性和遍历性,往往导致算法出现过早收敛、后期收敛速度缓慢和算法稳定性差问题,影响算法的有效性和实用性。将不动点与遗传算法相结合来寻找全标单纯形,使得遗传算法的效率极大地提高,原来需要上百代的遗传过程,仅需要几代或十几代就能得到近似最优解,但遗传算法虽然确定了具有最优解的单纯形,但是其剖分的精度范围没变,因此对于最优解的确定也是随机去取,精度需要改进,而且上述方法[6-7]对于二维解空间特别适用,但对

收稿日期:2013-04-24
基金项目:国家自然科学基金(11272112);河北省自然科学基金(E2012402061)　　特约专稿
作者简介:李群(1986-),男,山东省泰安人,硕士研究生,从事现代优化理论与设计方面的研究。

于多元函数(三次以上)极值问题,还没有涉及。本文针对上述方法不足,提出了剖分再剖分与遗传算法相结合策略(根据所需精度,可以多次剖分)。以三元函数为例,运用这种算法不仅能有效地锁定有效解区域,运用遗传算法在该区域对最优解进行提炼,找到满足合适精度要求的最优解。

1 不动点理论

1.1 不动点的定义

设 X 是 n 维欧式空间 R^n 的一个子集,如果对于 X 每一点 x,都确定了 X 的一 $f(x)$ 与之对应,则 f 是从 X 到自身的一个映射,或者说 f 是 X 的一个自映射,记作 $f:X\rightarrow X$。这时,如果 X 的一点 x 使得 $f(x)=x$,即点 x 在自映射 f 的作用之下保持不动,就称 $x\epsilon X$ 是自映射 $f:X\rightarrow X$ 的一个不动点。

设 $g:R^n\rightarrow R^n$ 是 n 维欧式空间 R^n 的一个自映射,对于 $x=(x_1,\cdots,x_n)\epsilon R^n$ 其映射值向量 $g(x)=g(x_1,\cdots,x_n)\epsilon R^n$ 可以表示为

$$g(x_1,\cdots x_n)=(g_1(x_1,\cdots x_n),\cdots g_n(x_1,\cdots x_n)) \tag{1}$$

称 $x\epsilon R^n$ 为 g 的一个零点,如果 x 被映射 g 送到 R^n 的原点,即 $g(x)=0$。由此可知,x 是映射 g 的零点,也就是说 x 使映射 g 取值为零。

1.2 不动点算法思想

对欧式空间进行四面体剖分,寻求这样一种四面体,点 (x_1,x_2,x_3) 在映射 f 的作用下它的一个顶点的第一个坐标分量下降,另一个顶点的第二个坐标分量下降,第三个顶点的第三个坐标分量下降,第四个顶点的三个坐标分量都保持不减。由于 f 的连续性,如果这个四面体的直径足够小,可使四面体的四个顶点在映射 f 的作用之下的变化情况不会相差太远。这时,三个顶点各有一个坐标分量下降,但第四个顶点的三个坐标分量都保持不减的性质使得三顶点各坐标分量的变动都不会大,所以每个顶点都是某种程度的近似不动点。

1.3 整数标号法

给定 $f:R^n\rightarrow R^n$ 设 G 是 R^n 的一个单纯剖分。按照

$$l(x)=\begin{cases}0,若\{i\epsilon N|f_1(x)<x_i\}=\Phi\\ \max\{i\epsilon N|f_1(x)<x_i\},其余情形\end{cases} \tag{2}$$

确定的对应 $l:G^0\rightarrow N_0=\{0,\cdots,n\}$。

1.4 常见函数问题转化为不动点问题

经常遇到的解方程组

$$\begin{cases}g_1(x_1,\cdots,x_n)=0\\ \vdots\\ g_n(x_1,\cdots,x_n)=0\end{cases} \tag{3}$$

的问题,就是求 R^n 的自映射 $g:R^n\rightarrow R^n$ 的零点的问题。这时,按照 $f(x)=x+g(x)$ 即

$$\begin{cases}f_1(x_1,\cdots,x_n)=x_1+g_1(x_1,\cdots,x_n),\\ \vdots\\ f_n(x_1,\cdots,x_n)=x_n+g_n(x_1,\cdots,x_n)\end{cases} \tag{4}$$

定义 R^n 的自映射 $f:R^n\rightarrow R^n$,就将求 的零点问题化成了等价的求 f 的不动点问题。事实上,如果 x 是 $g:R^n\rightarrow R^n$ 的零点。反之,如果 x 是 g 的零点,就有 $g(x)=0$,所以 $f(x)=x+g(x)=x$,即 x 是 f 的不动点。

1.5 K_1 剖分

记整数集为 Z,则 R^n 中的整点集即所有坐标分量均为整数的点的集合可记作 Z^n。

设 K_1^0 为 R^n 的整点集,若 $y^0\epsilon K_1^0$,而 π 是 N 的一种置换,就以 $k_1(y^0,\pi)$ 记 n 维单纯形 $<y^0,\cdots,y^n>$,其中 $y^i=y^{i-1}+u^{\pi(i)},i\epsilon N$。最后,记所有这样的 $k_1(y^0,\pi)$ 的集合为 k_1。

由于 N 的置换 π 的变化,R^n 中每个整点 y^0 的正侧 n 维单位方体都得到一个单纯剖分,总起来就得到整个 R^n 的一个单纯剖分。

2 算法实现过程

步骤1:进行不动点算法模块[8]的设计。对解空间按六面体做第一次剖分,在每个六面体内(图1)确定每个单纯形即对整解空间进行了 K_1 剖分。图2列举了其中一点 A 正侧面剖分的单纯形情况,记8个顶点为 $y^A,y^B,y^C,y^D,y^E,y^F,y^G,y^H$。该六面体含有6个单纯形,分别为 $\langle y^A,y^B,y^C,y^G\rangle$,$\langle y^A,y^B,y^H,y^C\rangle$,$\langle y^A,y^F,y^H,y^G\rangle$,$\langle y^A,y^C,y^D,y^H\rangle$,$\langle y^A,y^D,y^E,y^H\rangle$,$\langle y^A,y^E,y^F,y^H\rangle$。对每个顶点根据标号规则进行标号。顶点 A 与六面体存在一一映射关系。

步骤2:全标单纯形模块设计。判断方式是设计6个可能存在的全标单纯形的逻辑判断式,即6个单纯形中是否存在标号为 $\langle 0,1,2,3\rangle$ 的情况。通过这种方式得到解空间的全部存在全标单纯形

的六面体。

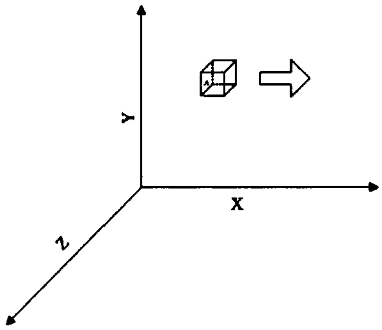

图 1 六面体剖分
Fig. 1 Hexahedral subdivision

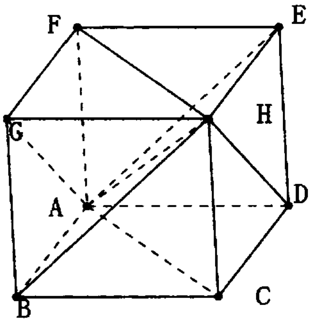

图2 K_1剖分
Fig. 2 K_1subdivision

步骤 3:编码设计。对于多维、高精度要求的连续函数优化问题,需要用实数编码方法,即每个基因值用实数表示。编码形式:$\{x_1,\cdots,x_n\}$,每个变量都有对应的上下限$[U^i_{\min},U^i_{\max}]$,$i\epsilon n$。

步骤 4:选择操作设计。将所求到的所有六面体中心值所对应的点为个体进行适应度求和 Σf_i,计算出每个个体的相对适应度$f_i/\Sigma f_i$,即每个个体被遗传到下一代群体的概率,每个概率值组成一个区域,全部概率值和为1;最后再产生一个0 到1 之间的随机数,依据该随机数出现在上述哪一个概率区域来确定各个个体被选中的次数,$M\dfrac{f_i}{\Sigma f_i}$即为在全标单纯形内随机取得点数,其中 M 为初始群体规模。

步骤 5:交叉变异运算操作设计。首先对群体进行随机配对;其次随机设置交叉点位置;最后相互交换配对染色体之间的部分基因。利用全标单纯形的优势,变异在全标单纯形区域内部执行,提高了准确度。具体操作过程:对于交叉操作中产生的每一个基因值,使用rand()产生一个[0,1]之间的随机数如果此随机数小于变异概率 p_m,就进行变异操作,变异在一该点为中心的一个步长区域随机取值加以替换。

3 实例分析

3.1 测试函数

求解心形函数$f(x)=(x_1{}^2+(9/4)x_2^2+x_3^2-1)^3-x_1^2x_3^3-(9/80)x_2^2x_3^3$ 的近似极小值及其近似最优解,约束条件为 $-3\leqslant x_i\leqslant 4, i=1,2,3$。

3.2 函数问题转化

将函数的优化问题转化为求解不动点问题

$F(X)=X-\nabla f(x)$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6(x_1{}^2+9/4x_2{}^2+x_3{}^2-1)^2x_1-2x_1x_3^3\\27/2(x_1{}^2+9/4x_2{}^2+x_3{}^2-1)^2x_2-9/40x_2x_3^3\\6(x_1{}^2+9/4x_2{}^2+x_3{}^2-1)^2x_3-3x_1{}^2x_3{}^2-27/80x_2{}^2x_2^3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\tag{5}$$

使用 C 语言对整个算法流程进行设计,步骤如下:

步骤 1:步长设置为解区间的百分之一对空间进行剖分标号,使用数组存放。标号法如下:

$$l(x)=\begin{cases}0,f_1(x)>=x_1,f_2(x)>x_2,f_3(x)>=x_3,\\1,f_1(x)>=x_1,f_2(x)>x_2,f_3(x)>=x_3,\\2,f_2(x)<=x_2,f_3(x)>=x_3,\\3,f_3(x)<x_3\end{cases}\tag{6}$$

步骤 2:使用全标单纯形判断规则进行判断,得到全标单纯形位置。图 3 记录所有全标单纯形所在对应地顶点值为遗传算法的进行做准备。

3.3 部分改进的遗传操作设计

初始群体的获取方式:将所求顶点的初始值做平移$(x_1,x_2,x_3)\to(x_1+\frac{1}{2}h_1,x_2+\frac{1}{2}h_2,x_3+\frac{1}{2}h_3)$得到六面体的中心点,根据各点的相对适应度大小,得出各全标单纯形所要随机取得点数(即初代)群体规模设置为 100。图 4 对该种群做遗传操作,其中 $p_c=0.8$,$p_m=0.05$,为了提高在全标单纯形内的搜索效率,变异概率采用偏高设置,同时可以看到,每一代都有几个变异个体偏离核心区域,但不影响对最优解判断。

3.4 实验结果分析

整个遗传算法进化过程,个体都在向某个全

标单纯形靠拢(最优解所在的全标单纯形)。第十代个体的分布比较集中(图5),个体分布在全标单纯形内部及附近,收敛效果显著。取算法在第20代收敛到的全标单纯形(图6),对应的全局极小值点为(0.000 1,0.000 2,0.000 1),对应函数值为-0.999 996。

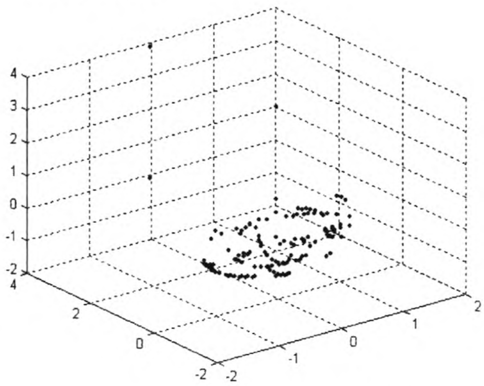

图3 第一次剖分含有全标单纯形

Fig.3 The corresponding vertex of the completely

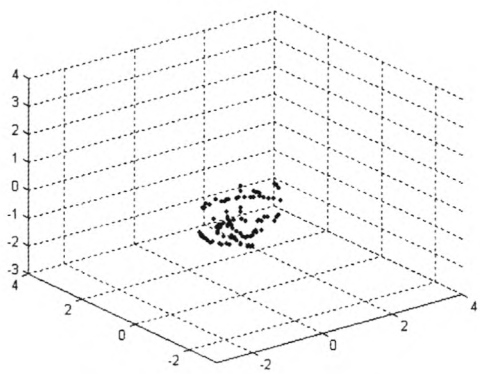

图4 初代个体分布六面体对应顶点

Fig.4 The initial generation individual distribution labeled simplex in the hexahedral firstly

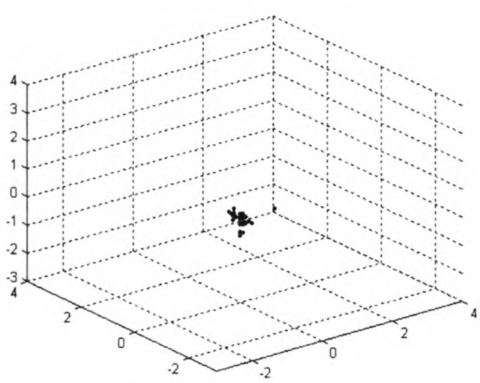

图5 第10代个体分布

Fig.5 The 10th generation individual distribution

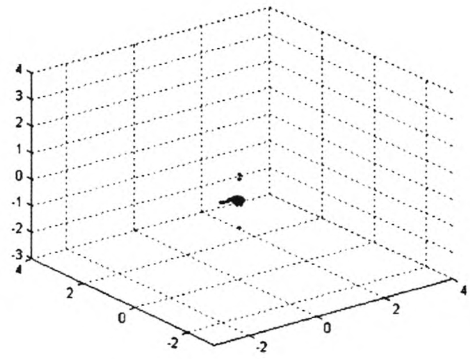

图6 第20代个体分布

Fig.6 The 20th generation individual distribution

4 结论

遗传算法与不动点两大理论相结合使遗传算法得到了质的飞跃。遗传算法是一个全局搜索过程,但收敛较慢,不动点算法的局部定位能力非常可观,这两种理论相互弥补,大大提高了遗传算法的收敛速度。基于不动点理论改进的遗传算法非常适合对有效数据区域的进行定位、提取、挖掘,是一种在多维空间寻找函数极值的可行手段。

参考文献:

[1] 张银蒲. 遗传算法在组播路由优化中的应用[J]. 河北科技大学学报, 2011, 32(3): 261-264.

[2] 张晓伟, 刘三阳. 一种新的区间-遗传算法[J]. 电子学报, 2007, 35(8): 1567-1571.

[3] 陈 琳, 黄 杰, 龚正虎. 一种求解最小诊断代价的小生境遗传算法[J]. 计算机学报, 2005,28(12): 2019-2026.

[4] LI Z. Application of new niche genetic algorithm on electromagnetic system optimization[J]. Journal of Scientific & Industrial Research. 2011, 70(07):506-512.

[5] 林 焰, 郝聚民, 纪卓尚, 等. 隔离小生境遗传算法研究[J]. 系统工程学报, 2000, 15(1): 86-91.

[6] ZHANG J J, CUI W, WANG N. Niche genetic algorithm for optimization deign of dynamic parameters of rigid multimode systems[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(3): 66-70.

[7] DONG Y Z, ZHANG J J, CAO R Z. An improved genetic algorithm based on hk1 subdivision and fixed point theory[C]//WANG S Y, YU L A, WEN F H, et al. Proceedings the second International Conference on Business Intelligence and Financial Engineering. Beijing: IEEE Computer Society Press, 2009: 222~230.

[8] 王则柯. 单纯不动点算法基础[M]. 长沙: 国防科技出版社, 1993.

（责任编辑　马立）