

Timoshenko 悬臂梁自振特性分析的新方法

胡启平,王倩倩

(河北工程大学 土木工程学院 河北 邯郸 056038)

摘要:考虑剪切变形和转动惯量的影响,建立了 Timoshenko 悬臂梁自由振动分析的哈密顿体系,采用两端边值特征值问题的本征值计数精细积分法,求解其圆频率,分析自振特性。本文以等截面欧拉悬臂梁自由振动为基础,与解析解对比,验证了本文方法的正确性。进而考虑剪切变形和转动惯量的影响,计算了 Timoshenko 悬臂梁的自振圆频率,分析其自振特性。从算例结果对比可以看出,本文方法简单、实用,具有较高精度。

关键词:Timoshenko 悬臂梁;哈密顿体系;精细积分法;自振特性;本征值计数

中图分类号:TU375

文献标识码:A

A new method of free vibration analysis of Timoshenko cantilever beams

HU Qi - ping, WANG Qian - qian

(College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Hebei Handan 056038, China)

Abstract:Being considered the effect of the shearing and moment of inertia, the Hamilton system of free vibration of the Timoshenko cantilever beams was set up. The circular frequency for the two ends eigenvalue problem was calculated by using the method of precise integration of eigenvalue counting theory. Then the free vibration was analyzed. Based on the free vibration of the uniform Euler beams, The correctness of this method was verified through the calculation result comparison with this method and the traditional method. Then the circular frequency of the Timoshenko cantilever beams with the consideration under the effect of the shearing and the moment of inertia was calculated. The comparison results show that the method is simple, practicable and with good precision.

Key words:Timoshenko cantilever beam; Hamilton system; precise integration method; free vibration; eigenvalue counting theory

对于高跨比较大的梁,梁在运动过程中剪切变形和转动惯量的影响则是不能忽略的,必须加以考虑,此时,必须运用 Timoshenko 梁理论进行分析。近年来,对于不同的 Timoshenko 梁振动问题,不同学者^[1-3]提出了各种不同的解法,这些解法中,有的提供了自振特性的解析解,但只能适用极特殊的情况,有的计算过程过于复杂,应用较困难。楼梦麟等^[4-6]曾应用模态摄动法求解了3种常见的等截面 Timoshenko 梁的动力特性,由于是在 Euler 梁主模态函数作为近似求解的 Ritz 基的基础上进行参数修正而得,积累误差较大。潘旦光等^[7]为考虑剪切变形和转动惯量的影响,基于

模态摄动法基本原理,提出了一种求解变截面 Timoshenko 悬臂梁自由振动问题的近似解法。

胡启平等^[8-9]推导出 Timoshenko 梁弯曲问题的哈密顿对偶体系,并采用精细积分法对其进行了解。本文导出了 Timoshenko 悬臂梁自由振动的哈密顿体系,采用两端边值特征值问题的本征值计数的精细积分法计算了圆频率,通过算例所得结果与精确解对比,验证了本文方法的正确性。

1 自由振动的哈密顿体系

如图1所示 Timoshenko 梁,用梁轴线的挠度 $\bar{v}(z,t)$ 和横截面的转角 $\bar{\theta}(z,t)$ 两个广义位移表示

收稿日期:2013-04-20

基金项目:河北省自然科学基金资助项目(E2011402057)

特约专稿

作者简介:胡启平(1963-),男,安徽霍邱人,教授,从事力学和结构工程方面的教学和研究工作。

梁内任一点 (x, y, z) 沿 x 轴、 y 轴和 z 轴的位移。

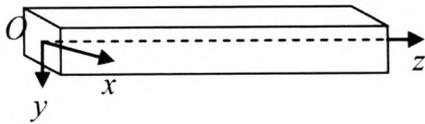


图1 Timoshenko梁

Fig.1 Timoshenko beam

Timoshenko 悬臂梁用位移表示的动力方程为

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[GA_s \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \tilde{\theta} \right) \right] + \tilde{q} = \rho A \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(EI \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) + GA_s \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \tilde{\theta} \right) + \tilde{m} = \rho I \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial t^2} \quad (2)$$

式中 E —材料的弹性模量; G —剪切模量; A —梁的截面面积; A_s —梁截面的等效剪切面积。

对时间采用化频域方法处理,采用 $\tilde{v} = v(z, \omega)e^{-i\omega t}$, $\tilde{\theta} = \theta(z, \omega)e^{-i\omega t}$, 其中 ω 是圆频率,于是动力方程变为

$$\frac{d}{dz} [GA_s(v - \theta)] + \rho A \omega^2 v + q = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz} (EI \dot{\theta}) + GA_s(v - \theta) + \rho I \omega^2 \theta + m = 0 \quad (4)$$

$$\text{令 } K_{22} = \begin{bmatrix} GA_s & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}, K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -GA_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GA_s \end{bmatrix}, K_{12} = K_{21}^T, M = [\rho A, \rho I]^T, q = [v, \theta]^T, g = [q, m]^T.$$

在对梁做自振分析时,可不考虑横向荷载,即 $g = 0$ 。于是写成矩阵形式为

$$K_{22}\ddot{q} + (K_{21} - K_{12})\dot{q} - K_{11}q + \omega^2 Mq = 0 \quad (5)$$

相应的拉格朗日函数为

$$L = L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T K_{22} \dot{q} + \dot{q}^T K_{21} q + \frac{1}{2} q^T (K_{11} - \omega^2 M) q \quad (6)$$

转入哈密顿体系,令

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = K_{22} \dot{q} + K_{21} q \quad (7)$$

相应的哈密顿函数为

$$H = H(q, p) = p^T A q - \frac{1}{2} q^T (B - \omega^2 M) q + \frac{1}{2} p^T D p \quad (8)$$

$$\text{本问题中 } p = \begin{bmatrix} GA_s(v - \theta) \\ EI \dot{\theta} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = A = \begin{bmatrix} 1/GA_s & 0 \\ 0 & 1/EI \end{bmatrix} \text{ 相应的哈密顿型微分方程为}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ B - \omega^2 M & -A^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (9)$$

边界条件为

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ p_L = 0 \end{cases} \quad (10)$$

2 自振频率的计算

本文采用两端边值特征值问题的本征值计数^[10]方法求解圆频率,通过编制 MATLAB 程序实现。

本征值计数是指:对于给定的正实数 $\omega_{\#}^2$,区段在其两端分别给定 $q_0 = 0, p_L = 0$ 的条件下,区段本征值小于 $\omega_{\#}^2$ 的数目。可以用 $J_R(\omega_{\#}^2, t_a, t_b)$ 表示这一计数,简称为 $J_R(\omega_{\#}^2)$ 。定义区段的本征值计数后,就可以结合扩展的 $W-W$ 算法确定区段合并后的本征值计数,进而得到整个区间的本征值计数。具体计算步骤为:

(1)在 MATLAB 程序中输入 $\omega_{\#}^2$ 以及 $K_{11}, K_{21}, K_{22}, M, H, n$ 等。(2)计算 A, B (以 B 代替 $B - \omega^2 M$), D 。(3)计算 τ 段上的 $F(\tau), G(\tau), Q(\tau), J_t(\omega_{\#}^2) = 0$ 。(4)计算 η 段上的 $F(\eta), G(\eta), Q(\eta), J_{\eta}(\omega_{\#}^2)$ (2^N 算法), $J_{2t}(\omega_{\#}^2) = J_t(\omega_{\#}^2) + J_t(\omega_{\#}^2) - s\{G(\tau)\} + s\{G^{-1}(\tau) + Q(\tau)\}$ (重复20次)。(5)赋值给各个单元(n 个单元),计算节点单元的 F, G, Q, J 。(6)赋值给各个单元(共 $2n$ 个单元),计算区间 $[0, H]$ 上的 $F_c, G_c, Q_c, J_c(\omega_{\#}^2)$,得到的特征值计数 $J_c(\omega_{\#}^2)$,即在 $[0, \omega_{\#}^2]$ 中特征值的个数。

另外, $s\{A\}$ 的计算方法是对 A 做三角分解 $A = LDL^T$, D 矩阵是对角阵, $s\{A\}$ 即 D 中负元素的个数, A 是对称阵,也就是 A 的特征值中负元素的个数。通过本征值计数可求出各阶圆频率。

3 算例验证

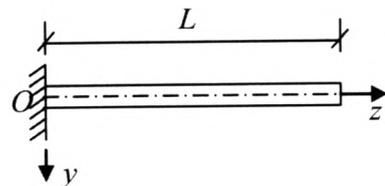


图2 悬臂梁

Fig.2 Cantilever beam

如文献[11]中的算例分析,等截面悬臂梁,如图2所示,梁长 $L = 6$ m,横截面面积为 $A = 1.2$ m \times 1.2 m,弹性模量为 $E = 3.0 \times 10^4$ MPa,泊松比 μ

$=0.4$, 密度为 $\rho = 2.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 横向剪切变形系数 $k = 5/6$ 。

表1是不考虑剪切变形及转动惯量的影响, 运用本文的方法得出来的计算结果与解析解^[12]的结果对比。此时, 取 $\rho I = 0, GA_s = \infty$ 。

由表1可以看出, 本文的计算结果非常接近于解析解, 可见, 采用两端边值特征值问题的本征值计数方法计算自振圆频率, 具有较高的精度, 验证了本方法的可行性。

对于考虑剪切变形和转动惯量影响的悬臂梁, 按传统方法求解比较困难, 而本文方法所编制的程序具有通用性, 且计算简便, 现考虑剪切变形及转动惯量的影响, 计算上述悬臂梁的频率。

此时, $\rho I = 3600, GA_s = 1.584 \times 10^{10}$ 。本文所得结果、文献解与解析解^[13]对比如表2所示。

从表2的对比分析可以看出, 本文的计算结果更接近于解析解, 具有较高的可信度。

表1 不考虑剪切变形及转动惯量影响的圆频率

Tab. 1 The circular frequency that neglects the effect of shearing and moment of inertia

求解方法	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
本文解	123.50 (0.48%)	771.00 (0.09%)	2157.50 (0.02%)	4227.5	6988.00	1043.80
解析解	122.91	770.30	2157.09	-	-	-

注: 括号内为各求解结果与解析解的相对误差。

表2 考虑剪切变形及转动惯量影响的自振圆频率

Tab. 2 The circular frequency considering the effect of shearing and moment of inertia

求解方法	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
本文解	119.29 (0.02%)	645.00 (-2.56%)	1537.50 (0.06%)	2561.50	3648.00	4740.50
解析解	119.28	661.97	1536.53	-	-	-
文献解	119.30 (0.02%)	644.60 (-2.62%)	1538.05 (0.10%)	-	-	-

注: 括号内为各求解结果与解析解的相对误差。

4 结语

本文基于精细积分法, 对 Timoshenko 悬臂梁自由振动的哈密顿方程进行求解, 算例结果对比分析表明, 该方法具有较高精度, 而且简便、实用。该方法为结构进行动力分析提供了依据。

参考文献:

- [1] LEUNG A Y T, ZHOU W E. Dynamic stiffness analysis of axially loaded non-uniform Timoshenko columns [J]. Computers & Structures, 1995, 56:577-588.
- [2] AUCIELLO N M. Free vibration of a restrained shear deformable tapered beam with a tip mass at its free end [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237:542-549.
- [3] AUCIELLO N M, ERCOLANO A. A general solution for dynamic response of axially loaded non-uniform Timoshenko beams [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41:4861-4874.
- [4] 楼梦麟, 任志刚. Timoshenko 简支梁的振动模态特性精确解[J]. 同济大学学报, 2002, 30(8):911-915.

- [5] 楼梦麟, 石树中. Timoshenko 固端梁特征值问题近似计算方法[J]. 应用力学学报, 2003, 20(1):140-143.
- [6] 段秋华, 楼梦麟. Timoshenko 悬臂梁自由振动特性的近似分析方法[J]. 2004, 20(5):20-23.
- [7] 潘旦光, 吴顺川, 张维. 变截面 Timoshenko 悬臂梁自由振动分析[J]. 2009, 31(3):25-28.
- [8] 胡启平, 李张苗, 侯瑞珀. 铁摩辛柯梁弯曲问题的对偶求解体系[J]. 河北建筑科技学院学报, 2006, 23(3):1-3.
- [9] 胡启平, 孙良鑫, 高洪俊. 铁摩辛柯梁弯曲问题的精细积分法[J]. 工业建筑, 2007, 37:268-270.
- [10] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [11] 张伟杰. 变截面 Timoshenko 悬臂梁动力特性的 ODE 解[J]. 建筑结构(增刊), 2010(40):401-404.
- [12] 刘晶波, 杜修力. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- [13] 龙驭球, 包世华. 结构力学(下)[M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.

(责任编辑 刘存英)