

文章编号: 1673-9469 (2017) 03-0109-04

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2017.03.024

## $H_v^0$ 空间上加权复合算子的超循环性

周宁

(天津大学 数学学院, 天津 300350)

**摘要** 描述  $H_v^0$  空间中加权复合算子  $uC_\varphi$  的超循环性, 给出解析自映射  $\varphi$  是自同构或双曲非自同构时, 加权复合算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  空间上是超循环的充分条件, 同时给出解析自映射  $\varphi$  是抛物非自同构时, 加权复合算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  空间上不是超循环的例子。

**关键词**: 分式线性映射; 加权复合算子; 超循环

**中图法分类号**: O174

**文献标识码**: A

## Hypercyclicity of weighted composition operators on the $H_v^0$ space

ZHOU Ning

(School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

**Abstract**: This paper characterizes the hypercyclicity of weighted composition operators on the  $H_v^0$  space. The sufficient condition of hypercyclicity of weighted composition operators is presented, when  $\varphi$  is an automorphism or a hyperbolic non-automorphisms. The examples showing the fact that weighted composition operators  $uC_\varphi$  on the  $H_v^0$  space are non-hypercyclic are also given, when  $\varphi$  is parabolic non-automorphisms.

**Key words**: linear fractional transformation; weighted composition operators; hypercyclicity

令  $D$  表示复平面上的开单位圆盘,  $H(D)$  表示  $D$  上解析函数全体,  $S(D)$  表示  $D$  上解析自映射全体。对于  $u \in H(D)$ ,  $\varphi \in S(D)$ , 定义加权复合算子  $uC_\varphi$  如下:

$$(uC_\varphi f)(z) = u(z)f(\varphi(z)), f \in H(D), z \in D$$

复合算子的研究是解析函数理论与算子理论相结合的产物<sup>[1-2]</sup>。

设  $v: D \rightarrow (0, \infty)$  是有界且连续的权函数, 则  $H_v^\infty$  和  $H_v^0$  空间定义如下:

$$H_v^\infty := \{f \in H(D); \|f\|_v = \sup_{z \in D} v(z)|f(z)| < \infty\}$$

$$H_v^0 := \{f \in H_v^\infty; \lim_{|z| \rightarrow 1} v(z)|f(z)| = 0\}$$

由文献[3]可知, 在范数  $\|\cdot\|_v$  意义下,  $H_v^\infty$  和  $H_v^0$  空间是 Banach 空间, 且多项式在  $H_v^0$  中稠密, 因此  $H_v^0$  是可分的。

令  $X$  表示可分的无限维 Banach 空间,  $L(X)$  表示  $X$  上连续线性算子。  $T \in L(X)$ , 若存在  $x \in X$  使得轨道  $orb(T, x) := \{x, Tx, T^2x, \dots\}$  在  $X$  中稠密,

则称  $T$  是超循环的。其中  $x$  称为  $T$  的超循环向量,  $HC(T)$  表示  $T$  的超循环向量全体构成的集合。

算子循环性的研究是线性动力系统中重要的内容之一<sup>[4-11]</sup>。文献[5]描述了复合算子在  $H_v^0$  空间上的超循环性。受其启发, 本文主要研究加权复合算子在  $H_v^0$  空间上的超循环性。

### 1 预备知识

形如  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ( $ad-bc \neq 0$ ) 的映射称为

分式线性变换, 令  $LFT(D)$  表示  $D$  上分式线性变换全体。把单位圆盘一一地映到自身的分式线性变换称为解析自同构, 令  $Aut(D)$  表示  $D$  上解析自同构全体。显然  $Aut(D) \subset LFT(D) \subset S(D)$ 。

按不动点性质可将  $\varphi \in LFT(D)$  进行如下分类:

(1) 若  $\varphi$  有唯一不动点, 且在  $\partial D$  上, 则称  $\varphi$  是  $LFT(D)$  中抛物映射。

收稿日期: 2017-06-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11371276)

作者简介: 周宁 (1992-), 女, 河北辛集人, 硕士, 从事多复变函数和算子理论方面的研究。

(2) 若  $\varphi$  在  $D$  上有一个吸引不动点, 在  $D$  外有一个排斥不动点, 则称  $\varphi$  是  $LFT(D)$  中双曲映射。两个不动点都在  $\partial D$  上的充要条件是  $\varphi$  是  $D$  上的自同构映射。

(3) 若  $\varphi$  在  $D$  内有一个不动点, 在  $\bar{D}$  外有一个不动点, 则称  $\varphi$  是  $LFT(D)$  中椭圆映射 (或斜驶的)。

本文中会用到单位圆盘上解析自映射  $\varphi$  的迭代性质, 为此需要应用 Denjoy-Wolff 定理。

定理 1.1 (Denjoy-Wolff) 若解析自映射  $\varphi: D \rightarrow D$  在  $D$  内没有不动点, 则存在  $\alpha \in \partial D$  使得  $\varphi^n$  的在  $D$  的紧子集上一致收敛于  $\alpha$ 。其中  $\alpha$  称为  $\varphi$  的 Denjoy-Wolff 点。

在本文中为确保算子的超循环性, 需要用到超循环准则。

定理 1.2 (超循环准则) 令  $X$  表示拓扑向量空间,  $T \in L(X)$ 。我们说  $T$  满足超循环准则, 如果存在一列递增的整数列  $(n_k)$ , 两个稠密子集  $D_1, D_2 \subset X$  和映射  $S_{n_k}: D_2 \rightarrow X$  使得:  $T^{n_k}(x) \rightarrow 0$  对任意  $x \in D_1$ ;  $S_{n_k}(y) \rightarrow 0$  对任意  $y \in D_2$ ;  $T^{n_k}S_{n_k}(y) \rightarrow y$  对任意  $y \in D_2$ 。

上面的超循环准则是确保算子超循环性的充分条件。

在  $H_v^\infty$  和  $H_v^0$  空间中,  $v: D \rightarrow (0, \infty)$  是有界且连续的权函数, 如果对任意  $z \in D$  满足  $v(z) = v(|z|)$  则称权函数为径向的。如果一个权既是径向的, 同时关于  $|z|$  非增且  $\lim_{|z| \rightarrow 1} v(z) = 0$ , 则称之为经典权。

在本文中研究的权均为经典权。

引理 1.3 若经典权满足条件 (L1)  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{v(1-2^{-n-1})}{v(1-2^{-n})} > 0$ ,

则存在一个常数  $C_v > 0$  (只与权函数  $v$  有关) 使得对所有的  $f \in H_v^\infty$  有

$$|f(z) - f(w)| \leq C_v \|f\|_v \max \left\{ \frac{\rho(z, w)}{v(z)}, \frac{\rho(z, w)}{v(w)} \right\},$$

对所有  $z, w \in D$  均成立。其中  $\rho(z, w) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|$  ( $z, w \in D$ ) 为拟双曲度量<sup>[12]</sup>。

## 2 $H_v^0$ 空间上加权复合算子的超循环性

引理 2.1 若解析映射  $\varphi: D \rightarrow D$  在  $D$  内没有不动点, 如果  $\alpha \notin D$  且权是经典的, 则在  $\alpha$  点为 0 的多项式全体构成的集合  $A_\alpha$  在  $H_v^0$  中稠密。

证明: 由文献 [5] 中 Proposition 3.3 易得。

以下引理来自于文献 [5] 中 Proposition 3.4。

引理 2.2 若  $v$  为经典权函数, 解析映射  $\varphi: D \rightarrow D$  在  $D$  内没有不动点。如果  $\alpha \in \partial D$  是  $\varphi$  的 Denjoy-Wolff 点, 则对任意多项式  $P$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P(\varphi^n) - P(\alpha)\|_v = 0$ 。

定理 2.3 如果加权复合算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  上是超循环的, 则解析自映射  $\varphi$  是单的, 且在  $D$  中没有不动点, 同时对任意  $z \in D$ ,  $u(z) \neq 0$ 。

证明: 由于多项式在  $H_v^0$  和  $H(D)$  中均稠密, 因此若  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  上是超循环的, 则在  $H(D)$  上也是超循环的, 由文献 [6] 中命题 1.1, 我们得到这个结论。

由定理 2.3 可知, 若解析自映射  $\varphi$  是椭圆映射 (或斜驶的), 则加权复合算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  上肯定不是超循环的。

定理 2.4 若  $\varphi$  是双曲自同构或抛物自同构。如果加权复合算子  $uC_\varphi: H_v^0 \rightarrow H_v^0$  连续, 且对  $z \in D$  有

$$C_1 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi_i(z))| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi_i(z))| \leq C_2$$

$C_1, C_2$  为大于 0 的常数, 则  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  上是超循环的。

证明: 由于  $\varphi$  是双曲自同构或抛物自同构, 则有  $z_0, z_1 \in \partial D$  (可以有  $z_0 = z_1$  的情形) 使得  $\varphi^n(z) \rightarrow z_0$  对所有  $z \in \bar{D} \setminus \{z_1\}$  和  $\varphi_n^{-1}(z) \rightarrow z_1$  对所有  $z \in \bar{D} \setminus \{z_0\}$ 。根据引理 2.1, 我们有  $A_{z_0}$  和  $A_{z_1}$  在  $H_v^0$  中稠密。

对任意  $f \in A_{z_0}$ , 根据引理 2.2, 有

$$\begin{aligned} \|(uC_\varphi)^n(f)\|_v &= \left\| \prod_{j=0}^{n-1} u(\varphi_j(z)) f(\varphi_n(z)) \right\|_v = \\ &= \sup_{z \in D} v(z) \left| \prod_{j=0}^{n-1} u(\varphi_j(z)) f(\varphi_n(z)) \right|, \\ &\leq C_2 \sup_{z \in D} v(z) |f(\varphi_n(z))| = C_2 \|f(\varphi_n(z))\|_v \rightarrow \\ &C_2 \|f(z_0)\|_v = 0 \end{aligned}$$

定义  $S_n f(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{u(\varphi_j^{-1}(z))} f(\varphi_n^{-1}(z))$  对  $z \in D$ 。

同理, 对于  $f \in A_{z_1}$ ,  $\|S_n f\|_v \rightarrow 0$ , 且  $(uC_\varphi)^n S_n f = f$ 。因此, 满足超循环准则,  $uC_\varphi$  是超循环的。

例 2.5 由定理 2.4, 易知  $\varphi \in \text{Aut}(D)$  且无内部不动点时, 如果复合算子  $C_\varphi: H_v^0 \rightarrow H_v^0$  连续, 则  $C_\varphi$  在  $H_v^0$  上是超循环的。

例 2.6 设  $\varphi(z) = \frac{(1+i\pi)z-i\pi}{i\pi z+1-i\pi}$ , 易知  $\varphi$  是抛物

自同构且  $\varphi(1)=1$ 。令  $\sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}$  对  $z \in D$ ,  $\sigma$  是从单

位圆盘  $D$  到右半平面  $P$  的共形映射。对  $w \in P$ , 我们有  $\sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}(w) = w - 2i\pi$ , 令  $v(w) = \exp(e^{\frac{w}{2}} - e^{-\frac{w}{2}})$  对  $w \in P$ , 经过计算可得  $v(w) \cdot v(w - 2i\pi) = 1$ , 因此, 由定理 2.4, 若  $u = v \circ \sigma$ , 我们有  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  上是超循环的。

定理 2.7 若  $\varphi$  是双曲非自同构的。如果加权复合算子  $uC_\varphi: H_v^0 \rightarrow H_v^0$  连续, 且对  $z \in D$  有

$$C_1 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi_i(z))| \leq$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi_i(z))| \leq C_2$$

$C_1, C_2$  为大于 0 的常数, 则  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  上是超循环的。

证明: 该定理的证明类似于参考文献 [2] 中 7.2 节线性分式超循环定理 (a) 的证明。

由于  $\varphi$  是双曲非自同构, 则有吸引点  $z_0 \in \partial D$  使得  $\varphi^n(z) \rightarrow z_0$ , 排斥点  $z_1 (\bar{D}$  在外, 可能是  $\infty$ )。根据引理 2.1, 我们有  $A_{z_0}$  和  $A_{z_1}$  在  $H_v^0$  中稠密。首先, 假设排斥固定点  $z_1$  位于原点  $z_0$  和确定的直线上, 且和  $z_0$  分别位于原点两侧。用  $\Delta$  表示过  $z_1$  点在  $z_0$  处与  $D$  相切, 且切线垂直于过原点、 $z_0$  和  $z_1$  的直线的开圆盘, 则  $\varphi$  是  $\Delta$  的共形自同构。对任意  $f \in A_{z_0}$ , 同定理 2.4,  $\|(uC_\varphi)^n(f)\|_v \rightarrow 0$ , 定义  $S_n f(z) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{u(\varphi_j^{-1}(z))} \times f(\varphi_n^{-1}(z))$  对  $z \in D$ 。同理, 对于  $f \in A_{z_1}$ ,  $\|S_n f\|_v \rightarrow 0$ , 且  $(uC_\varphi)^n S_n f = f$ 。此外, 若  $z_1$  没有位于以上位置, 则存在  $D$  的一个共形自同构  $\gamma_a$  固定  $z_0$  且把  $z_1$  映到以上位置。因此, 满足超循环准则,  $uC_\varphi$  是超循环的。

定理 2.8 令  $v(z) = (1-|z|^2)^p$ , ( $0 < p < 1$ ), 假设  $\varphi \in LFT(D)$  是抛物非自同构的, 如果加权复合算子  $uC_\varphi: H_v^0 \rightarrow H_v^0$  连续, 且对  $z \in D$  有  $\sup_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi_i(z))| \leq C$  同时满足, 当  $z \rightarrow 1$  时,  $u(z)$  不趋于 0, 则算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  空间上不是超循环的。

证明: 由于  $\varphi \in LFT(D)$  是抛物非自同构的, 因此在  $\partial D$  上有唯一不动点。不失一般性, 不妨设其不动点为 1。因此, 由文献 [2], 我们有

$$\varphi(z) = 1 + \frac{2(z-1)}{2-a(z-1)} \quad z \in D,$$

$$\varphi^n(z) = 1 + \frac{2(z-1)}{2-an(z-1)} \quad z \in D, n \in \mathbb{N},$$

其中  $a = \varphi'(1)$ ,  $\operatorname{Re} a > 0$ 。

通过计算易得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \varphi^n(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(1-z)}{2-an(z-1)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\frac{2}{1-z} + an} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{2}{(1-z)n} + a} = \frac{2}{a} \quad (1)$$

$$\varphi^{n+1}(z) - \varphi^n(z) =$$

$$\frac{2a(z-1)^2}{a^2 n^2 (z-1)^2 + a^2 n (z-1)^2 - 4an(z-1) - 2a(z-1) + 4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\varphi^{n+1}(z) - \varphi^n(z)) = \frac{2}{a} \quad (2)$$

由于迹  $(\varphi^n(z))_n$  非切逼近于固定点 1, 固定  $z \in D$  可知存在常数  $c > 0$  使得对任意  $n$ 。

$1 - |\varphi^n(z)| \geq c |1 - \varphi^n(z)|$ , 结合 (1) 式和 (2) 式可得

$$\rho(\varphi_{n+1}(z), \varphi_n(z)) = \frac{|\varphi^{n+1}(z) - \varphi^n(z)|}{|1 - \varphi^{n+1}(z)\varphi^n(z)|} \leq$$

$$\frac{|\varphi^{n+1}(z) - \varphi^n(z)|}{c |1 - \varphi^{n+1}(z)|} \leq c' \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n+1}} = c' \frac{n+1}{n^2} \rightarrow c' \frac{1}{n},$$

$n \rightarrow \infty$  ( $c, c'$  为大于 0 的常数)。

在下面的证明中, 为了方便, 特用  $C$  泛指大于 0 的常数, 与具体数值无关。

当  $v(z) = (1-|z|^2)^p$  ( $0 < p < 1$ ) 时, 显然权  $v$  满足 (L1) 条件, 由引理 1.3 得

设  $f \in H_v^0$ ,

$$|(uC_\varphi)^{n+1} f(z) - u(\varphi_n(z))(uC_\varphi)^n f(z)|$$

$$= \left| \prod_{j=0}^n u(\varphi_j(z)) \right| |f(\varphi^{n+1}(z)) - f(\varphi^n(z))|$$

$$\leq C |f(\varphi^{n+1}(z)) - f(\varphi^n(z))|$$

$$\leq C \|f\|_v \max \left\{ \frac{\rho(\varphi^{n+1}(z), \varphi^n(z))}{v(\varphi^{n+1}(z))}, \frac{\rho(\varphi^{n+1}(z), \varphi^n(z))}{v(\varphi^n(z))} \right\}$$

$$= C \rho(\varphi^{n+1}(z), \varphi^n(z)) \max \left\{ \frac{1}{v(\varphi^{n+1}(z))}, \frac{1}{v(\varphi^n(z))} \right\}$$

由 (1) 式,

$$\frac{1}{v(\varphi^n(z))} = \frac{1}{(1-|\varphi^n(z)|^2)^p} = \frac{1}{(1-|\varphi^n(z)|)^p(1+|\varphi^n(z)|)^p}$$

$$= \frac{C}{(1-|\varphi^n(z)|)^p} \leq \frac{C}{|1-\varphi^n(z)|^p} = Cn^p$$

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } |(uC_\varphi)^{n+1}f(z) - u(\varphi^n(z))(uC_\varphi)^n f(z)| \leq$$

$$C \frac{1}{n} \cdot n^p = \frac{C}{n^{1-p}} \rightarrow 0.$$

又因为迹  $(\varphi^n(z))_n$  趋于固定点 1, 因此当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u(\varphi^n(z)) \rightarrow u(1)$  且不趋于 0, 进而可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(uC_\varphi)^n f(z) - \frac{(uC_\varphi)^{n+1} f(z)}{u(\varphi^n(z))}] = 0.$$

最后, 假设  $f \in H_v^0$  是  $uC_\varphi$  的超循环向量, 则对于  $\forall g \in H_v^0$  存在数列  $\{n_k\}$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\|(uC_\varphi)^{n_k} f - g\|_v \rightarrow 0$ , 由于  $H_v^0$  中范数收敛可以得到逐点收敛, 因此对  $z \in D$  有

$$g(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} (uC_\varphi)^{n_k} f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{n_k-1} u(\varphi^j(z)) f(\varphi^{n_k}(z))$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(uC_\varphi)^{n_k+1} f(z)}{u(\varphi^{n_k}(z))} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=0}^{n_k} u(\varphi^j(z)) f(\varphi^{n_k+1}(z))}{u(\varphi^{n_k}(z))}$$

$$= \frac{g(\varphi(z))u(z)}{u(1)}$$

$$\therefore g \circ \varphi(z)u(z) - u(1)g(z) = 0 \Rightarrow (uC_\varphi - u(1))g = 0 \Rightarrow$$

$$uC_\varphi = u(1)I \Rightarrow \begin{cases} u = u(1) \\ \varphi(z) = z \end{cases}$$

这与  $\varphi$  是非自同构矛盾, 因此  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  空间上不是超循环的。

### 3 结论

若  $\varphi \in LFT(D)$ , 加权复合算子  $uC_\varphi: H_v^0 \rightarrow H_v^0$  ( $u \in H(D)$ ) 连续。

1) 当  $\varphi$  是椭圆映射 (或斜驶的) 时, 算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  空间上不是超循环的。

2) 当  $\varphi$  是抛物自同构的或双曲的且对  $z \in D$  有

$$C_1 \leq \inf_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi_i(z))| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi_i(z))| \leq C_2,$$

$C_1, C_2$  为大于 0 的常数, 则算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  空间上是超循环的。

3) 当  $\varphi$  是抛物非自同构的, 令  $v(z) = (1-|z|^2)^p$ ,

( $0 < p < 1$ ), 且对  $z \in D$  有  $\sup_{n \in \mathbb{N}, z \in D} \prod_{i=0}^n |u(\varphi^i(z))| \leq C$  同

时满足当  $z \rightarrow 1$  时,  $u(z)$  不趋于 0, 则算子  $uC_\varphi$  在  $H_v^0$  空间上不是超循环的。

### 参考文献:

- [1] CCOWEN C C, MACCLUER B D. Composition operators on spaces of analytic functions[M]. Boca Raton: CRC Press, 1995.
- [2] SHAPIRO J H. Composition Operators and Classical Function Theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [3] LUSKY W. On the Structure of  $H_v^0(D)$  and  $h_v^0(D)$ [J]. Mathematische Nachrichten, 1992, 159(1): 279-289.
- [4] ROLEWICZ S. On orbits of elements[J]. Studia Mathematica, 1969, 32(32): 17-22.
- [5] ALEJRO M, ELKE W. Hypercyclic composition operators on spaces[J]. Mathematische Nachrichten, 2013, 286(1): 34-41.
- [6] YOUSEFI B, REZAEI H. Hypercyclic property of weighted composition operators[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2007, 135(10): 3263-3271.
- [7] ZHANG L, ZHOU Z H. Dynamics of composition operators on weighted Bergman spaces[J]. Indagationes Mathematicae, 2016, 27(1): 406-418.
- [8] LIANG Y X, ZHOU Z H. Hypercyclic behaviour of multiples of composition operators on the weighted Banach space[J]. Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, 2014, 21(3): 385-401.
- [9] ZHANG L, ZHOU Z H. Hypercyclicity of weighted composition operators on a weighted Dirichlet space[J]. Complex Variables & Elliptic Equations, 2014, 59(7): 1043-1051.
- [10] BAYART F, ÉTIENNE Matheron. Dynamics of Linear Operators[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [11] BOURDON P S, SHAPIRO J H. Cyclic phenomena for composition operators[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1997, 125(596): 105.
- [12] ELKE W. Differences of Composition Operators between Weighted Banach Spaces of Holomorphic Functions on the Unit Polydisk[J]. Results in Mathematics, 2008, 51(3): 361-372.