文章编号：1673-9469（2018）03-0110-03　doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2018.03.022

不确定环境下定期分红股票贷款定价研究

张旭昌，王小胜

（河北工程大学 数理科学与工程学院，河北 邯郸 056038）

摘要：基于不确定理论，根据定期分红股票模型，建立定期分红股票贷款定价方程，给出股票贷款价值的计算方法；根据2017年的金融数据进行实证研究，得出股票持有者应该进行股票贷款的结论。

关键词：不确定理论；股票模型；定期分红；股票贷款定价

中图分类号：F832.5　**文献标志码**：A

The pricing of stock loan with periodic dividends under uncertain environment

ZHANG Xuchang，WANG Xiaosheng

(School of Mathematics and Physics，Hebei University of Engineering，Handan 056038，China)

Abstract：In this paper，we investigate the pricing problem of stock loan with periodic dividends in the framework of uncertainty theory. Based on the stock model with periodic dividends，the uncertain differential equation governing the value of stock loan is derived. Therefore，the formulas of price of stock loan can be obtained to provide support to decision-making for investors with large equity positions. In order to validate the effectiveness of the proposed method，the experimental datasets extracted from stock market are used as the testing target. The experimental results show that the stockholders should borrow through the stock market.

Key words：uncertainty theory；stock model；periodic dividends；the pricing of stock loan

股票贷款为股票持有者提供了一种抵御金融危机的方法。如果股价上涨了，借方可以选择偿还贷款重新获得自己的股票；如果股价下跌了，那么借方可以选择放弃自己的股票,而不是偿还银行贷款。很多学者进行了股票贷款定价研究[1-3]，但是，这些研究都是在概率论的框架之内进行的。在真正复杂的金融市场里，由于认知的有限性，很多投资者根据专家的建议和自己的认知作为决策依据，而不是根据大量的数据推导出来的参数或概率作为决策依据。在古典随机金融理论中，标的资产的价格过程是假设遵循随机微分方程的。但是，这个假设被很多学者挑战。Liu[4] 的研究表明使用随机微分方程去表述股票价格过程是不合适的，Liu 建议使用不确定微分方程去表述股票价格过程。Liu[5]，Chen[6]，Zhang[7] 分别利用 Liu 的不确定股票模型解决了欧式期权，美式期权和几何平均亚式期权的定价问题。Zhang[8] 等人利用 Liu 的不确定股票模型推导出幂型期权的定价公式。Zhang[9] 等人进行了股票贷款的定价研究，Zhang 假设借方与银行获得的股票分红相等，但是实际情况并非如此。本文设股票分红的比例为出资比例，这样更符合实际情况。本文在不确定理论的框架内研究股票贷款定价问题。基于股票价格过程遵循不确定微分方程的假设，根据定期分红股票模型，推导出定期分红股票贷款定价方程；并且进行了实证研究。

1 预备知识

设 Γ 是一个非空集合，L 是定义在 Γ 上的 σ 代数，称 L 中的元素 Λ 为事件，$M\{\Lambda\}$ 表示事件 Λ 发生的

收稿日期：2018-05-16　特约专稿

基金项目：国家自然科学基金资助项目 (61873084)；河北省高等学校科学技术研究重点项目 (ZD2017016)

作者简介：张旭昌 (1990-)，男，安徽阜阳人，研究生，研究方向为不确定统计预测与决策。

可能性。不确定测度 M[10] 是满足公理 2.1、公理 2.2 及公理 2.3 的集合函数。

公理 2.1 对于全集 Γ，有

$$M\{\Gamma\}=1$$

公理 2.2 对于任意的事件 Λ，有

$$M\{\Lambda\}+M\{\Lambda^c\}=1$$

公理 2.3 对于任意的可列事件 $\{\Lambda_i\}$，有

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}\Lambda_i\right\}\le\sum_{i=1}^{\infty}M_k\{\Lambda_k\}$$

下面的乘积公理体现了不确定理论与概率论的差异。

公理 2.4[11] 设 $(\Gamma_k,\ \mathcal{L}_k,\ M_k)$，$k$=1，2，…是不确定空间，乘积不确定测度 M 是不确定测度，满足

$$M\left\{\prod_{k=1}^{\infty}\Lambda_k\right\}\le\bigwedge_{k=1}^{\infty}M_k\{\Lambda_k\}$$

其中 $\Lambda_k\in\mathcal{L}_k$，$k$=1，2，…

定义 2.1[13] 设 $(\Gamma,\ \mathcal{L},\ M)$ 是一个不确定空间，T 是一个全序集 (例如：时间)。不确定过程 $X_t(\gamma)$ 是从 $T\times(\Gamma,\ \mathcal{L},\ M)$ 映射到实数集合一个函数，即对于任意 Borel 集 B，集合 $\{X_t\in B\}=\{t\in T|X_t\in B\}$ 是一个事件。

定义 2.2[11] 若不确定过程 C_t 满足：(1)C_0=0 且几乎所有样本路径都是 Lipschitz 连续的；(2)C_t 有平稳独立增量；(3) 增量 $C_{s+t}-C_s$ 是期望为 0，方差为 t^2 的正态不确定变量。

则称不确定过程 C_t 为 Liu 过程。

Liu 过程 C_t [10] 的不确定分布为

$$\Phi_t(x)=\left(1+e^{-\frac{\pi x}{\sqrt{3}t}}\right)^{-1}$$

其逆不确定分布为

$$\Phi_t^{-1}(a)=\frac{t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}$$

设 C_t 为 Liu 过程 [10]，对任意的实数 e 和 σ>0，不确定过程 $A_t=et+\sigma C_t$ 的逆不确定分布为

$$\Phi_t^{-1}(a)=et+\frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}$$

不确定过程 $G_t=e^{et+\sigma C_t}$ 的逆不确定分布为

$$\Phi_t^{-1}(a)=e^{et+\frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}}$$

定义 2.3[14] 设 a 是一个数，而且 0<a<1。如果 X_t^a 是微分方程 $\mathrm{d}X_t^a=f(t,\ X_t^a)\mathrm{d}t+|g(t,\ X_t^a)|\Phi^{-1}(a)\mathrm{d}t$ 的解。其中，$\Phi^{-1}(a)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}$，那么不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t=f(t,\ X_t)\mathrm{d}t+g(t,\ X_t)\mathrm{d}C_t$ 有 a 轨道 X_t^a。

定理 2.1[14-15] 设 X_t 是不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t=f(t,\ X_t)\mathrm{d}t+g(t,\ X_t)\mathrm{d}C_t$ 的解，X_t^a 是不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t=f(t,\ X_t)\mathrm{d}t+g(t,\ X_t)\mathrm{d}C_t$ 的 a 轨道。X_t 的逆不确定分布 $\Psi_t^{-1}(a)=X_t^a$

对任意的 S>0 和严格增函数 $J(\mathrm{x})$，$\sup_{0\le t\le s}J(X_t)$，有逆不确定分布 $\Psi_t^{-1}(a)=\sup_{0\le t\le s}J(X_t^a)$

定理 2.2[14] 设 X_t 是不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t=f(t,\ X_t)\mathrm{d}t+g(t,\ X_t)\mathrm{d}C_t$ 的解，X_t^a 是不确定微分方程 $\mathrm{d}X_t=f(t,\ X_t)\mathrm{d}t+g(t,\ X_t)\mathrm{d}C_t$ 的 a 轨道。对任意的非单调函数 J，$E[J(X_t)]=\int_0^1 J(X_t^a)da$。

2 定期分红股票贷款定价实证分析

定期分红股票贷款的问题可以这样描述：设借方以自己的股票作为抵押物从银行获得现金 K，如果借方在贷款期限 T 之前偿还本金加利息 $Ke^{\theta t}$，θ 是贷款利率，$t\in[0,\ T]$。那么，借方有权利重新获得他的股票；否则，股票为银行所有。Chen 等人 [12] 在 2013 年提出了定期分红的股票模型，股票模型如下

$$\begin{cases}X_t=X_0e^{rt}\\ S_t=S_0(1-\delta)^{n[t]}e^{\mu t+\sigma C_t}\end{cases}$$

其中，X_0 是 0 时刻债券价格，X_t 是 t 时刻债券价格，S_0 是 0 时刻股票价格，S_t 是 t 时刻股票价格，δ 是每次分红的比例，γ 是无风险利率，μ 是预期回报率，σ 是波动率，C_t 是 Liu 过程，T_1，T_2，…为分红时间，$n[t]=\max\{i:\ T_i\le t\}$ 是分红次数，在 t 时刻分红价值为

$$\begin{aligned}I_t&=S_0e^{\mu t+\sigma C_t}-S_0(1-\delta)^{n[t]}e^{\mu t+\sigma C_t}\\&=S_0(1-(1-\delta)^{n[t]})e^{\mu t+\sigma C_t}\end{aligned}$$

借方付款的的现在价值为

$$\sup_{0\le t\le T}e^{-\gamma t}\left(S_t+\lambda I_t-Ke^{\theta t}\right)^+$$

其中 $(x)^+=\begin{cases}x,x>0\\0,x\le 0\end{cases}$，$\lambda$ 是借方获得股票分红的比例，股票贷款的价值应该是借方付款价值的现在期望值，那么股票贷款的价值定义如下。

定义 3.1 设借方获得股票分红比例为 λ，I_t 为 t 时刻的分红，S_0 是 0 时刻股票价格，S_t 是 t 时刻股票价格，贷款量为 K，贷款利率为 θ，γ 是无风险利率，贷款期限为 T，定义 V 为股票贷款的价值

$$V=E\left[\sup_{0\le t\le T}e^{-\gamma t}\right]\left(S_t+\lambda I_t-Ke^{\theta t}\right)^+\Big]$$

定理 3.1 假设股票贷款遵守

$$\begin{cases}X_t=X_0e^{rt}\\ S_t=S_0(1-\delta)^{n[t]}e^{\mu t+\sigma C_t}\end{cases}$$

那么股票贷款的价值为

$$V=\int_0^1 \sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}\left[S_0\left(\lambda+(1-\lambda)(1-\delta)^{n[t]}\right)e^{\mu t+\frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}}-Ke^{\theta t}\right]^+ \mathrm{d}a$$

证明：Liu 过程 C_t 有逆不确定分布

$$\Phi_t^{-1}(a)=\frac{t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}$$

$$S_t+\lambda I_t=S_0(\lambda+(1-\lambda)(1-\delta)^{n[t]})e^{\mu t+\sigma C_t}$$

关于 C_t 是单调增的，那么 $S_t+\lambda I_t$ 的逆不确定分布为

$$\Psi_t^{-1}(a)=S_0(\lambda+(1-\lambda)(1-\delta)^{n[t]})e^{\mu t+\sigma\Phi_t^{-1}(a)}$$
$$=S_0(\lambda+(1-\lambda)(1-\delta)^{n[t]})e^{\mu t+\frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}}$$

$$J(x)=e^{-\gamma t}(x-e^{\theta t})^+$$

关于 x 是增函数，

$$\sup_{0\le t\le T} J(S_t+\lambda I_t)=\sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}(S_t+\lambda I_t-Ke^{\theta t})^+$$

有逆不确定分布

$$\Psi_t^{-1}(a)=\sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}\left[S_0\left(\lambda+(1-\lambda)(1-\delta)^{n[t]}\right)e^{\mu t+\frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}}-Ke^{\theta t}\right]^+$$

股票贷款的价值为

$$V=\int_0^1 \sup_{0\le t\le T} e^{-\gamma t}\left[S_0\left(\lambda+(1-\lambda)(1-\delta)^{n[t]}\right)e^{\mu t+\frac{\sigma t\sqrt{3}}{\pi}\ln\frac{a}{1-a}}-Ke^{\theta t}\right]^+ \mathrm{d}a$$

根据上证综合指数 2017 年的全年数据可知预期收益率 μ =6.56%，波动率 σ =13.98%，分红率 δ=0.05；根据中国人民银行发行的国债利率可知无风险利率 γ =4%；假设初始状态下的股票价格 S_0=40，根据中国人民银行和中国银行业监督委员会的规定，股票质押率不能高于 60%，按最高比例 60% 贷款，借方的分红比例为 λ =60%，贷款数量为 K=24，根据工商银行数据我们得到贷款利率 θ=4.75%，期限为 1 年，分红期 T_1=0.5，T_2=1，那么可以得到股票贷款的价值 V=17.52。我们购买股票实际花费的价格为 16，所以应该进行股票贷款。

3 结论

本文基于不确定定期分红股票模型，推导出定期分红股票贷款定价方程；根据 2017 年的金融数据进行实证研究，得出股票持有者应该进行股票贷款的结论。本文的创新之处在于根据出资比例作为获得股票分红的比例，这样更符合实际情况。当然本文也有不足之处，本文只研究了 1 年期股票贷款的情况，并没有进行多年期股票的股票贷款问题的研究，以后的研究可以从此处着手。

参考文献：

[1]XIA J，ZHOU X Y. Stock loans[J]. Math Finance，2007，17：307-317.

[2]LIANG Z，WU W，JIANG S. Stock loan with automatic termination clause，cap and margin [J]. Computers Mathematics Applications，2010，60：3160-3176.

[3]CAI N，SUN L. Valuation of stock loans with jump risk[J]. Journal of Economics Dynamics Control，2014，40：213-241.

[4]LIU B. Toward uncertain finance theory[J]. Journal of Uncertainty Analysis and Applications，2013，1：1.

[5]LIU B. Some research problems in uncertainty theory[J]. Journal of Uncertain Systems，2009，3(1)：3-10.

[6]CHEN X W. American option pricing formula for uncertain financial market[J]. International journal of Operations Research，2011，8(2)：32-37.

[7]ZHANG Z Q，LIU W Q. Geometric average Asian option pricing for uncertain financial market[J]. Journal of Uncertain Systems，2014，8(4)：317-320.

[8]ZHANG Z Q，LIU W Q，SHENG Y H. Valuation of power option for uncertain financial market[J]. Applied Mathematics and Computation，2016，286：257-264.

[9]ZHANG Z Q，LIU W Q，DING J G. Valuation of stock loan under uncertain environment[J]. Soft Computer，2017，1：7.

[10]LIU B. Uncertainty theory[M]. 5nd ed.Berlin：Springer，2016.

[11]LIU B. Some research problems in uncertainty theory[J]. Journal of Uncertain System，2009，3(1)：3-10.

[12]CHEN X W，LIU Y H，RALESCU D A. Uncertain stock model with periodic dividends[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making，2013，12(1)：111-123.

[13]LIU B. Fuzzy process，hybrid process and uncertain process[J]. Journal of Uncertain System，2008，2(1)：3-16.

[14]YAO K，CHEN X W. A numerical method for solving uncertain differential equations[J]. Journal Intelligent & Fuzzy Systems，2013，25(3)：825-832.

[15]YAO K. Extreme values and integral of solution of uncertain differential equation[J]. Journal of Uncertainty Analysis and Applications，2013，1：2.

（责任编辑 王利君）