

文章编号: 1673-9469 (2019) 02-0060-04

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2019.02.014

## 基于非定常分数阶微积分的岩石蠕变模型研究

王豫宛<sup>1,2</sup>, 王伟<sup>1,2</sup>, 周倩瑶<sup>1,2</sup>, 梅胜尧<sup>1,2</sup>

(1. 河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098; 2. 江苏省岩土工程技术工程研究中心, 河海大学, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 分数阶导数引入蠕变模型可较好地模拟蠕变特性, 为了解决常规分数阶黏滞体的微分阶次多为定常数, 不能用同一元件模拟岩石蠕变的衰减、稳定或加速阶段的问题, 基于分数阶微积分理论, 提出了一种非定常微分阶次的分数阶黏性元件, 将此元件与引入分数阶的理想黏塑性体及理想弹簧串联, 建立了新的非线性黏弹塑性蠕变模型, 推导了该模型的蠕变方程, 并分别利用岩石蠕变试验结果及西原体模型、河海模型对其合理性进行了验证、对比。结果表明: 本文所建模型拟合曲线与试验数据吻合较好, 误差较小, 具有较高的准确性及合理性, 能够较好地模拟岩石蠕变全过程。

**关键词:** 岩石蠕变; 非定常分数阶微积分; 分数阶黏滞体; 非线性黏弹塑性模型

**中图分类号:** TU45

**文献标识码:** A

## Study on Rock Creep Model Based on Unsteady Fractional Order Calculus Theory

WANG Yuwan<sup>1,2</sup>, WANG Wei<sup>1,2</sup>, ZHOU Qian Yao<sup>1,2</sup>, MEI Sheng Yao<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China; 2. Jiangsu Research Center for Geomechanical Engineering Technology, Hohai University, Nanjing, Jiangsu 210098, China)

**Abstract:** By introducing fractional calculus theory to the rock creep model, pronounced effect was obtained in describing the creep property of rock mass. However, the orders of the conventional fractional viscous body almost are almost constant, so a single element cannot be used to simulate the attenuation stage, steady stage or the accelerating stage of rock creep. According to the fractional calculus theory, a modified fractional viscous body with unsteady differential orders was developed. Then, through connecting it and the ideal viscoelastic body that introduced the fractional calculus with the traditional elastic body, a new nonlinear viscoelasto-plastic creep model for rocks was established. In this paper, the creep equation of the model was deduced, and the rationality of which was verified by using creep test data of rocks. What's more, the paper made a comparison between the proposed model and the Nishihara model, the HoHai model, respectively. The results indicate that the fitting curves and test curves conform very well to each other. The proposed model has high accuracy and rationality and can well reflect the whole stages of rock creep process.

**Key words:** rock creep; unsteady differential orders; fractional viscous body; nonlinear viscoelasto-plastic creep model

岩石流变模型是流变理论研究的重要内容, 因其具有概念直观、本构方程形式简单、参数物理意义明确等优点, 而被研究者广泛研究<sup>[1]</sup>。基于分数阶微积分算子理论, 殷德顺、郭佳奇等<sup>[2-3]</sup>定义了

收稿日期: 2018-12-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11672343, 51679069); 国家重点研发计划项目(2017YFC1501100); 中央高校基本科研业务费专项资金资助(2016B20214)

作者简介: 王豫宛(1996-), 女, 河南南阳人, 硕士研究生, 主要从事岩石力学与工程的研究。

含分数阶导数的力学元件，较好地反映岩石流变的非线性渐变过程。陈亮等<sup>[4]</sup>借鉴经典元件建模的思路，提出了统一采用分数阶微积分形式表达的四元件非线性黏弹塑性流变模型，并给出了该模型的本构方程及蠕变方程。

大部分学者<sup>[5-8]</sup>在采用分数阶微积分理论来建立岩石蠕变本构关系的过程中，通常采用分数阶黏滞体与经典元件组合的方法，即将经典黏滞体替换为分数阶黏滞体。但在模型建立过程中，大多基于分数阶的微分阶次在 0 ~ 1 之间，很少考虑采用微分阶次大于 1 来模拟加速蠕变阶段。并且在模型的建构过程中，通常将微分阶数看作常数，不能用同一元件来描述岩石蠕变的衰减、稳定阶段或者加速阶段，模型参数较多。因此，本文为使分数阶黏滞体得以改进，一方面综合考虑应力对岩石蠕变特性的影响，应力为常规分数阶黏滞体中的微分阶数的变量，取值范围依次对应岩石蠕变的不同阶段；另一方面采用常规的分数阶黏滞体代替理想黏塑性体中的经典黏滞体，得到改进的理想黏塑性体。最后，以串联的方式，将改进的分数阶黏滞体、改进的理想黏塑性和经典弹性体依次连接，得出并验证非定常分数阶微积分的岩石蠕变模型。

### 1 改进的分数阶黏滞体

#### 1.1 分数阶微积分基本定义

分数阶微积分有助于有效建立岩石流变本构模型<sup>[9]</sup>。分数阶微积分定义范围较广，本文所采用的理论基础为 Riemann Liouville 型微积分算子理论<sup>[10-11]</sup>，函数在可积区间上的阶积分数学表达式为：

$$\frac{d^{-\gamma} [f(t)]}{dt^{\gamma}} = D_t^{-\gamma} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

相应的，函数  $f(t)$  的  $\gamma$  阶微分定义为：

$$\frac{d^{\gamma} [f(t)]}{dt^{\gamma}} = D_t^{\gamma} f(t) = \frac{d^n [D_t^{-(n-\gamma)} f(t)]}{dt^n} \quad (2)$$

即

$$\frac{d^{\gamma} [f(t)]}{dt^{\gamma}} = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-\gamma-1}}{\Gamma(n-\gamma)} f(\tau) d\tau \right] = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \int_0^t \frac{\tau^{n-\gamma-1}}{\Gamma(n-\gamma)} f(\tau) d\tau \right] \quad (3)$$

式中： $\gamma$  为微分阶数， $0 < \gamma < 1$ ，且  $n - 1 < \gamma < n$ ；

$\Gamma(\gamma)$  为伽马函数，当  $\gamma > 0$  时， $\Gamma(\gamma)$  定义为：

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-t} dt \quad (4)$$

以上分数阶微积分的 Laplace 变换公式为：

$$\begin{cases} L[D_t^{\gamma} f(t), p] = p^{-\gamma} f(p) \\ L[D_t^{-\gamma} f(t), p] = p^{\gamma} f(p) \end{cases} \quad (5)$$

式中： $f(p)$  为  $f(t)$  Laplace 变换。

#### 1.2 分数阶黏滞体

分数阶黏滞体的本构关系为：

$$\sigma = \eta_{\gamma} \frac{d^{\gamma} \varepsilon}{dt^{\gamma}} \quad (6)$$

式中： $\sigma$  为应力； $\varepsilon$  为应变； $t$  为时间； $\gamma$  为分数阶微分阶数； $\eta_{\gamma}$  为黏滞系数。

由式 (6) 可知：当  $\gamma = 0$  和  $\gamma = 1$  时，分数阶黏滞体可分别代表理想弹性体和理想流体材料；当  $0 < \gamma < 1$  时，可描述性质介于两者之间的材料的力学特性。根据这种表述方式，分数阶微积分黏滞体如图 1 所示。

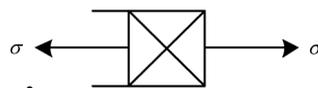


图 1 分数阶黏滞体

Fig.1 Fractional viscous body

基于 Laplace 代换原理，在应力  $\sigma$  维持稳定不变时，对 (6) 式进行双侧分数阶积分，可得分数阶黏滞体蠕变方程

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta_{\gamma}} \cdot \frac{t^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (7)$$

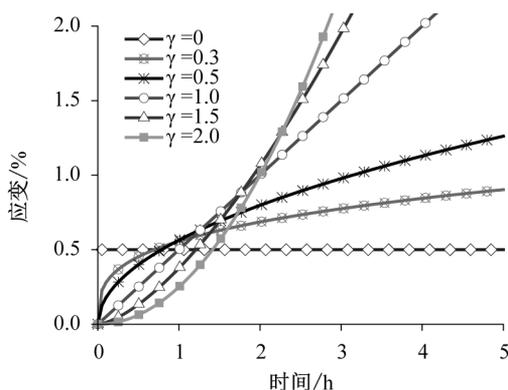


图 2 分数阶黏滞体的蠕变曲线

Fig.2 Creep curves of fractional viscous body

在应力不变的情况下， $\gamma$  发生变化时，蠕变曲线的变化趋势也随之改变，取  $\sigma = 20$  MPa， $\eta_{\gamma} = 4\ 000$  MPa·h $^{\gamma}$  根据式 (7) 可得到分数阶黏滞体在

$\gamma$ 取不同值时的一组蠕变曲线,如图2所示。

如图(2)所示: $\gamma = 0$ 和 $\gamma = 1$ 对应理想固体和理想流体的蠕变特征; $0 < \gamma < 1$ 和 $\gamma > 1$ ,分别对应减速蠕变及加速流变特性,且当 $\gamma > 1$ 时,应变及应变速率得以显著增大。

### 1.3 非定常微分阶次分数阶黏滞体

在同一蠕变模型中,传统的分数阶黏滞体只能固定微分阶次,只能模拟岩石流变的前两阶段或者加速阶段。除此之外,应力水平也无法与常规分数阶黏滞体中的微分阶数有效联系,即常规分数阶黏滞体缺少一定的岩石力学意义。本文基于分数阶微积分理论,提出一种非定常微分阶次的分数阶黏性元件,微分阶次可随应力改变而改变。岩石的加速蠕变阶段只有在岩石所受应力水平超过屈服应力时才会发生,故本文假定分数阶微分阶次 $\gamma$ 与应力 $\sigma$ 之间存在如下关系:

$$\gamma = b \cdot \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_0}\right) \quad (8)$$

式中: $\sigma_s$ 为岩石的屈服极限; $\sigma_0$ 为单位应力,取为1,量纲与 $\sigma$ 相同; $b$ 是与岩石性质有关的正实数。

结合图(2)及式(8)可知,当时 $\sigma > \sigma_s$ , $\gamma > 1$ ,可模拟岩石加速蠕变阶段;当 $\sigma \leq \sigma_s$ 时, $0 < \gamma < 1$ ,可模拟岩石的衰减和稳态蠕变阶段。改进的分数阶黏滞体模型如图3所示。

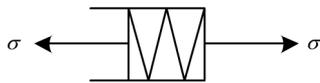


图3 改进的分数阶黏滞体

Fig.3 Modified fractional viscous body

## 2 岩石非线性流变模型建立

将理想黏塑性体中的黏滞体替换为分数阶黏滞体( $0 < \gamma < 1$ ),即可得到改进的理想黏塑性体,其应力-应变关系满足下式:

$$\begin{cases} \sigma \leq \sigma_s, \varepsilon = 0 \\ \sigma > \sigma_s, \sigma = \frac{d^\gamma \varepsilon}{dt^\gamma}, 0 < \gamma < 1 \end{cases} \quad (9)$$

如图4所示,为较好地描述岩石蠕变的全过程,本文以串联的方式,得出一种新型非线性流变模型,即将前面提出的变分数阶微积分黏滞体、改进的理想黏塑性体及弹簧进行连接,得到新的非线性流变模型,如图4所示。由图4可见:非线性模型由变

分数阶黏滞体(第1部分)、弹性体(第2部分)和改进的理想黏塑性体(第3部分)组成。当 $\sigma \leq \sigma_s$ 时,第3部分为刚体,对本构模型没有影响。由式(8)可知第1部分的 $0 < \gamma < 1$ ,可描述岩石的前两阶段;当 $\sigma > \sigma_s$ 时,第3部分的开关打开,其可描述岩石的衰减、稳态蠕变阶段。由式(8)可知此时第1部分的 $\gamma > 1$ ,可描述岩石的加速蠕变阶段。

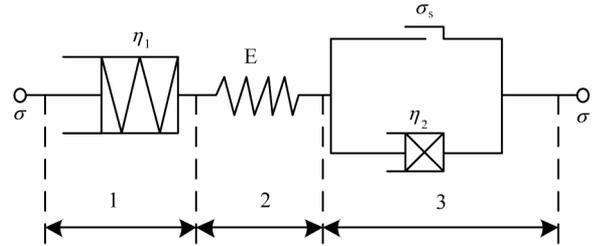


图4 非线性黏弹塑性蠕变模型

Fig.4 Nonlinear viscoelasto-plastic creep model

(1) 当 $\sigma \leq \sigma_s$ 时,模型的状态方程为:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\sigma$ 和 $\varepsilon$ 分别为模型的总应力和总应变; $\sigma_i(i=1, 2)$ 为模型第*i*部分的应力; $\varepsilon_i(i=1, 2)$ 为模型第*i*部分的应变。

由式(7)和式(8)可知,第1部分的蠕变方程为

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{\eta_1} \cdot \frac{t^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}, \quad \gamma = b \cdot \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_0}\right) \quad (11)$$

对于第2部分,其蠕变方程为

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E} \quad (12)$$

(2) 当 $\sigma > \sigma_s$ 时,模型的状态方程为:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \end{cases} \quad (13)$$

前两部分的蠕变方程与 $\sigma \leq \sigma_s$ 时一致。由式(9)可知,第3部分的蠕变方程为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta_\gamma} \cdot \frac{t^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (14)$$

由此可知: $\sigma \leq \sigma_s$ 时的模型蠕变方程为:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta_1} \cdot \frac{t^\wedge(b \cdot a)}{\Gamma(1+(b \cdot a))} + \frac{\sigma}{E} \quad (15)$$

式中:  $a = \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_s}{\sigma_0}\right)$

$\sigma > \sigma_s$ 时的模型蠕变方程为:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\eta_1} \cdot \frac{t^\wedge(b \cdot a)}{\Gamma(1+(b \cdot a))} + \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\eta_2} \cdot \frac{t^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)} \quad (16)$$

### 3 非线性流变模型的试验验证

本文采用李栋伟等<sup>[12]</sup>的软岩蠕变试验数据以及吴斐等<sup>[13]</sup>的试验数据分别对 $\sigma \leq \sigma_s$ 和 $\sigma > \sigma_s$ 的蠕变模型进行参数反演,给出在不同参数条件下蠕变理论曲线。并在 $\sigma > \sigma_s$ 时与西原体模型及徐卫亚等<sup>[14]</sup>提出的河海模型进行对比分析,验证该模型的准确性及合理性。

李栋伟等的试验数据表明: $\sigma \leq \sigma_s$ 时,正应力为 3.2 MPa,屈服应力为 3.24 MPa。基于最小二乘法原理,采用自定义函数的方法对试验曲线进行拟合,计算出岩石流变力学参数(见表 1),拟合曲线和试验曲线对比情况见图 5。由图 5 可知,拟合曲线与试验结果吻合较好。

当 $\sigma > \sigma_s$ 时,采用流变曲线分解法进行曲线拟合,可得本文模型、西原体模型及河海模型的力学参数(见表 2),对应的拟合曲线见图 6。

如图 6 所示,本文得出的非线性流变模型模拟曲线,能够与实际试验结果很好吻合,岩石蠕变的全过程能够通过本文所建模型有效模拟,模型克服了西原模型只能描述蠕变第 I、II 阶段的不足。此外,本文的模型与徐卫亚提出的河海模型相比,拟合曲线基本重合,但本文模型参数相对较少,这进一步说明了本文提出的模型的可行性、准确性以及简洁性。

表 1 模型参数 ( $\sigma \leq \sigma_s$ )

Tab.1 Parameters of models( $\sigma \leq \sigma_s$ )

$\sigma$ /MPa	模型参数		
	$\eta_1$ /MPa.h	$b$	$E$ /GPa
3.2	173.578 9	0.155 6	2 357.4

表 2 模型参数 ( $\sigma > \sigma_s$ )

Tab.2 Parameters of models( $\sigma > \sigma_s$ )

蠕变模型	模型参数									
	$E$ /MPa	$E_1$ /MPa	$E_2$ /MPa	$E_3$ /MPa	$\eta_1$ /(MPa.h)	$\eta_2$ /(MPa.h)	$\eta_3$ /(GPa.h)	$n$	$b$	$\gamma$
本文模型	7.16	-	-	-	1 997 671	47.21	-	-	1.35	0.71
西原模型	-	7.16	59.14	-	43.59	30.73	-	-	-	-
河海模型	-	7.16	6.35	179.12	56.35	37.77	29 291	5.84	-	-

### 4 结论

1) 基于常规的分阶黏滞体模型,将分阶的微分阶次看做非定常数,建立微分阶次与应力与 $\sigma$ 的关系式,提出改进的分阶黏滞体模型体。当应力改变时,微分阶次随之改变,且微分阶次的取值

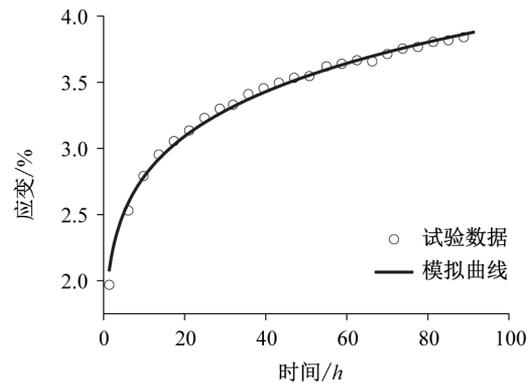


图 5 拟合曲线与试验数据对比图 ( $\sigma \leq \sigma_s$ )

Fig.5 Comparison between fitting curves and test data( $\sigma \leq \sigma_s$ )

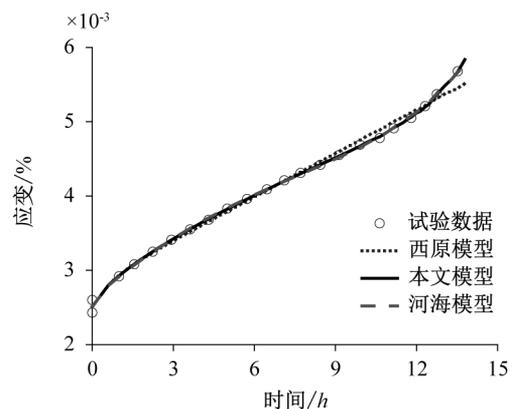


图 6 不同蠕变模型拟合曲线对比图 ( $\sigma > \sigma_s$ )

Fig.6 Comparisons of fitting curves of different creep models( $\sigma > \sigma_s$ )

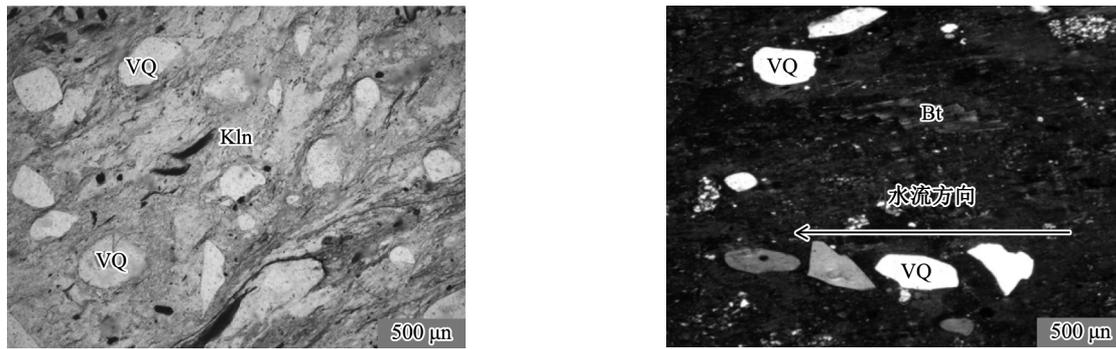
范围能够与岩石蠕变的不同阶段相对应。

2) 建立非线性黏弹塑性蠕变模型,并给出相应的蠕变方程。该模型结构简单,模型参数相对较少。

3) 用相关文献的岩石蠕变试验数据对本文提出的模型的合理性进行验证,拟合结果表明,本文提出的非线性蠕变模型能够更好地模拟岩石蠕变的全过程,具有较高的准确性和可行性。

### 参考文献:

[1] 蔡美峰. 岩石力学与工程 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.  
 [2] 殷德顺, 任俊娟, 成亮, 等. 一种新的岩土流变模型元件 [J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(9): 1899-1903.  
 [3] 郭佳奇, 乔春生, 徐冲, 等. 基于分数阶微积分的 Kelvin-Voigt 流变模型 [J]. 中国铁道 (下转第 69 页)



(a) 碎屑边缘磨蚀现象以及显微流动纹理，单偏光；  
 (b) 石英砂粒叠瓦状排列，箭头指示流水方向。VQ：火山石英；Kln：高岭石；Bt：黑云母  
 图4 原地沉积与流水搬运特征照片(样品号：33和35)

Fig.4 In-situ deposition and flow handling feature (sample numbers: 33 and 35)

3) 隐晶高岭石团块为硅铝质玻璃屑蚀变产物，由于经受了盆底水流改造作用，其蚀变作用现象已经消失殆尽。

#### 参考文献：

- [1] 张慧. 煤系地层中高岭石的形态 - 成因类型 [J]. 矿物学报, 1992, (1): 53-57.
- [2] 刘钦甫, 张鹏飞. 华北晚古生代煤系高岭岩物质组成及成矿机理研究 [M]. 北京: 海洋出版社, 1997.
- [3] 何仕. 大同塔山煤矿粘土岩的特征及成因 [J]. 中国煤炭地质, 2006, 18(3): 23-25.
- [4] 霍舒婷. 大同矿区煤系高岭岩矿物特性与赋存规律的研究 [D]. 太原: 太原理工大学, 2013.
- [5] 张统军, 刘钦甫, 王国新. 山西 - 大同煤田石炭二叠纪煤系高岭岩资源评价与利用 [M]. 太原: 山西人民出版社, 2015.
- [6] 梁绍暹, 姚改焕, 刘金芳. 华北石炭—二叠纪煤系火山灰蚀变粘土岩夹矸中石英的研究 [J]. 西北大学学报: 自然科学版, 1996, (03): 26-29.
- [7] 王水利, 梁绍暹. 山西大同小峪煤矿煤系粘土岩夹矸地球化学特征 [J]. 煤田地质与勘探, 2011, 39(6): 6-10.
- [8] 常青. 大同煤田石炭 - 二叠系中高岭岩物质组分和形成条件的初步研究 [J]. 地质论评, 1985, 31(5): 437-445.
- [9] 朱如凯, 张运东. 晋北晚古生代煤系高岭岩成因模式研究 [J]. 岩相古地理, 1997, (1): 11-21.
- (责任编辑 李新)
- (上接第 63 页) 科学, 2009, 30(4): 1-4.
- [4] 陈亮, 陈寿根, 张恒, 等. 基于分数阶微积分的非线性黏弹性蠕变模型 [J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2013, 45(3): 7-11.
- [5] 康永刚, 张秀娥. 岩石蠕变的非定常分数伯格模型 [J]. 岩土力学, 2011, 32(11): 3237-3248.
- [6] 王军保, 刘新荣, 王铁行, 等. 基于改进分数阶黏滞体的岩石非线性蠕变模型 [J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2015, 46(4): 1461-1467.
- [7] 何志磊, 朱珍德, 朱明礼, 等. 基于分数阶导数的非定常蠕变本构模型研究 [J]. 岩土力学, 2016, 37(3): 737-744.
- [8] 熊德发, 王伟, 杨广雨, 等. 软岩非定常分数阶导数流变模型研究 [J]. 三峡大学学报: 自然科学版, 2018(1): 39-43.
- [9] 何利军, 孔令伟, 吴文军, 等. 采用分数阶导数描述软黏土蠕变的模型 [J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 2): 239-245.
- [10] KOELLER R C. Application of Fractional Calculus to the Theory of Viscoelasticity [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(2): 299-307.
- [11] ADOLFSSON K, ENELUND M, OLSSON P. On the Fractional Order Model of Viscoelasticity [J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2005, 9(1): 15-34.
- [12] 李栋伟, 汪仁和, 范菊红. 白垩系冻结软岩非线性流变模型试验研究 [J]. 岩土工程学报, 2011, 33(3): 398-403.
- [13] 吴斐, 刘建锋, 武志德, 等. 盐岩的分数阶非线性蠕变本构模型 [J]. 岩土力学, 2014, 35(增刊 2): 162-167.
- [14] 徐卫亚, 杨圣奇, 褚卫江, 等. 岩石非线性黏弹性流变模型 ( 河海模型 ) 及其应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(3): 433-447.
- (责任编辑 李新)