文章编号：1673-9469（2019）02-0105-04 doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2019.02.024

考虑延迟时距的不确定工期 - 费用优化模型研究

惠明晶[1]，王小胜[2]，刘欣欣[2]，张 倩[1]，胡 豪[1]

(1. 河北工程大学 管理工程与商学院，河北 邯郸 056038；2. 河北工程大学 数理科学与工程学院，河北 邯郸 056038)

摘要：项目工期受较大的不确定性因素影响，故应用不确定理论来描述工期 - 费用优化问题。考虑到实际工程项目中工序间存在的搭接关系，将搭接关系表示为延迟时距引入工期计算式中，进而构建考虑延迟时距的不确定工期 - 费用优化模型。同时，我们给出并证明模型的等价形式，并用于原模型的求解。最后，通过工程案例验证模型的有效性。

关键词：项目调度；工期－费用优化；不确定理论；延迟时距

中图分类号：TU722 **文献标识码**：A

Study on Uncertain Time-cost Trade-off Model with Delay Time

HUI Mingjing[1]，WANG Xiaosheng[2]，LIU Xinxin[2]，ZHANG Qian[1]，HU Hao[1]

(1.School of Management Engineering and Business，Hebei University of Engineering，Handan，056038，China；2.School of Mathematics and Physics，Hebei University of Engineering，Handan，056038，China)

Abstract：This paper applies the uncertainty theory to the time-cost trade-off problem due to various uncertain factors in real project. In practice，the overlapping relationships among some activities usually exist in the project. In order to simplify the calculation，the relationships are converted into the delay time and introduced to the formula of the project time. Then，the uncertain time-cost trade-off model with delay time is built. Meanwhile，the equivalent form of the uncertain programming model is given and proven to solve the proposed model. Finally，a project case is used to illustrate the effectiveness of the proposed model.

Key words：project scheduling；time-cost trade-off；uncertainty theory；delay time

工程项目实施过程中，管理者通常利用延长或缩短某些工序持续时间的方式达到工期与费用间优化的目的。为了描述实际工程项目中存在的不确定现象，越来越多的学者借助不确定理论[1]中不确定变量来描述工序持续时间。Liu[2]提出了基于不确定理论的工期 - 费用优化问题，并建立期望费用最小化模型。Ke等[3]将正常持续时间设为不确定变量，可控制持续时间为决策变量，构建基于不确定理论的期望费用最小化模型和费用机会最大化模型。考虑到项目中工序间存在的搭接关系，逐渐出现了搭接网络计划的研究问题。Crandall[4]将搭接关系划分为STS、FTF、STF和FTS等四种基本形式。杨冰[5]提出将四种搭接关系表示为延迟时距（工序开始时间与其紧前工序完成时间的差值），并设计搭接网络图改进后工序时间参数的计算方法。贺兆泽[6]构建了改进的工期 - 费用优化模型，并利用遗传算法进行求解。

本文应用不确定理论描述工期 - 费用优化问题。同时，将搭接关系表示为延迟时距引入模型中，构建考虑延迟时距的不确定工期 - 费用优化模型，并设计模型的求解方法。

1 考虑延迟时距的不确定工期－费用优化模型

1.1 问题描述

项目中工序间的优先级和搭接关系采用单代号

收稿日期：2019-01-11

基金项目：国家自然科学基金项目(61873084)；河北省教育厅项目(ZD2017016)；2018年河北省研究生创新资助项目(CXZZSS2018076)；邯郸市科学技术研究与开发软科学研究项目(1534201097-1)

作者简介：惠明晶(1992-)，女，河南新乡人，硕士研究生，从事管理科学的理论与方法方面的研究。

搭接网络图来表示。设网络图为 $G=(V, A)$，其中 $V=\{1, 2, \cdots, n\}$ 为图 G 的节点集，节点 i 表示一道工序，而节点 1 和 n 为两道虚工序，只表示项目的开始和完成；$A=\{(i, j)|1 \le i<j \le n\}$ 为图 G 的箭线 (i, j) 集，箭线表示工序 i 与 j 之间的逻辑关系，并在箭线上方标注时距符号。网络图中从节点 1 出发，沿着箭头方向经过若干箭线和节点，最后到达节点 n 的通路称为线路，将线路中各工序的持续时间求和得到该线路的长度，并称网络图中最长的线路为关键线路。单代号搭接网络图如图 1 所示。

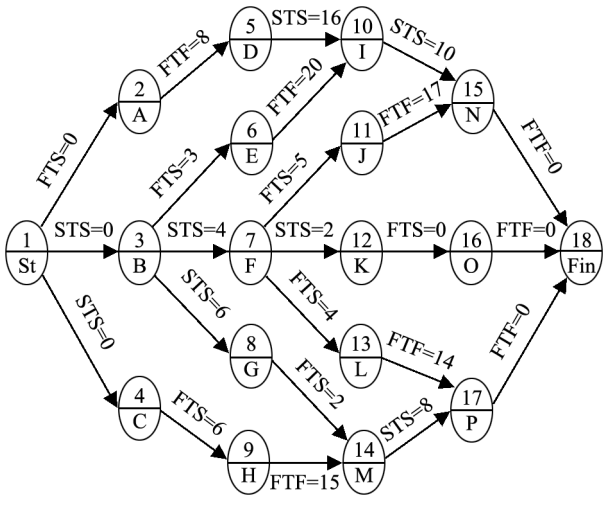

图 1 单代号搭接网络图

Fig. 1 The activity-on-node spliced network

本文应用不确定理论描述实际工程项目中不确定现象。由于影响因素的不同，将工序持续时间分为正常持续时间和可控制持续时间，前者主要受不利的客观自然条件或突发自然灾害等外部环境的不确定性影响，设为不确定变量；而后者会受到管理者选择的调度方案中资源分配情况的影响，设为决策变量。考虑到项目可利用的有限资源总量及工序的施工工艺和技术要求，该变量在某区间内取整数。与工序持续时间相对应的单位正常费用和单位额外费用设为常数。

基本假设：(1) 项目中所有的工序正常持续时间为独立的不确定变量，分别具有正则不确定分布；(2) 项目中所有的工序可控制持续时间为决策变量；(3) 相邻工序间只存在一种搭接关系形式；(4) 项目的开工日期为 0，每道工序在施工过程中不得中断；(5) 网络图中箭线、节点和线路的数量均是有限的。

1.2 不确定环境下工期和费用的分布

根据确定环境下延迟时距的定义及表达式 [5]，我们给出不确定环境下延迟时距的计算式

$$T_{ij}=\begin{cases} FTS_{ij}, & 若(i,j)\in A_1 \\ STS_{ij}-(\zeta_i+x_i), & 若(i,j)\in A_2 \\ FTF_{ij}-(\zeta_j+x_j), & 若(i,j)\in A_3 \\ STF_{ij}-(\zeta_i+x_i)-(\zeta_j+x_j), & 若(i,j)\in A_4 \end{cases}$$

式中：T_{ij}—工序 i 与 j 之间的延迟时距；ζ_i—工序 i 的正常持续时间；x_i—工序 i 的可控制持续时间；A_1、A_2、A_3、A_4—工序间的搭接关系为 FTS、STS、FTF 以及 STF，A_k，k=1，2，3，4 满足两两不相交且 $\sum A_k=A$.

网络图中，虚工序 1 和的持续时间为 0. 由基本假设知，工序 1 的开始时间为 0，即 $T_1=0$. 工序 j 的开始时间为

$$T_j(x,\zeta)=\max_{(i,j)\in A}\{T_i(x,\zeta)+\zeta_i+x_i+T_{ij}\}$$

$$=\begin{cases} \max\limits_{(i,j)\in A_1}\{T_i(x,\zeta)+\zeta_i+x_i+FTS_{ij}\} \\ \max\limits_{(i,j)\in A_2}\{T_i(x,\zeta)+STS_{ij}\} \\ \max\limits_{(i,j)\in A_3}\{T_i(x,\zeta)+\zeta_i+x_i+FTS_{ij}-(\zeta_j+x_j)\} \\ \max\limits_{(i,j)\in A_4}\{T_i(x,\zeta)+STF_{ij}-(\zeta_j+x_j)\} \end{cases}$$

式中：T_i—工序的开始时间；ζ—项目中所有的工序正常持续时间 ζ_i 构成的向量；x—项目中所有的工序可控制持续时间 x_i 构成的向量。

整个项目的工期为

$$T(x,\zeta)=max\{T_j(x,\zeta)+\zeta_j+x_j\},\ 1\le j\le n \quad (1)$$

注：网络图中，若 $T_{1j}(x, \zeta)<0$ 且工序 1 和 j 之间无箭线连接，则添加该箭线，并令 $STS_{1j}=0$. 若 $T(x, \zeta)=T_j(x, \zeta)+\zeta_j+x_j$ 且工序 j 和 n 之间无箭线连接时，则添加该箭线，并令 $FTF_{jn}=0$.

项目总费用是项目中每道工序所支出的费用之和，为：

$$C(x,\xi)=\sum c_i\xi_i+d_ix_i,\ i\in V \quad (2)$$

式中：c_i—工序在正常持续时间下所支出的单位正常费用；d_i—工序在可控制持续时间下所支出的单位额外费用。

设所有工序的正常持续时间 $\zeta=\{\zeta_i|\in V\}$ 为独立的不确定变量，分别具有正则的不确定分布 Φ_i，$1\le n$. 则由不确定变量的定义及逆不确定分布定理 [7] 知，T_{ij} 为不确定变量，且其逆不确定分布为 $\Psi_{ij}^{-1}(\beta)$。同理，$T_j(x, \zeta)$ 也为不确定变量，其逆不确定分布为：

$$\Psi_j^{-1}(x,\beta)=\max_{(i,j)\in A}\{\Psi_i^{-1}(x,\beta)+\Phi_i^{-1}(\beta)+x_i+\Psi_{ij}^{-1}(\beta)\}$$

$$=\begin{cases}\max\limits_{(i,j)\in A_1}\{\Psi_i^{-1}(x,\ \beta)+\Phi_i^{-1}(\beta)+x_i+FTS_{ij}\}\\ \max\limits_{(i,j)\in A_2}\{\Psi_i^{-1}(x,\ \beta)+STS_{ij}\}\\ \max\limits_{(i,j)\in A_3}\{\Psi_i^{-1}(x,\ \beta)+\Phi_i^{-1}(\beta)+x_i+FTF_{ij}-(\Phi_j^{-1}(1-\beta)+x_j)\}\\ \max\limits_{(i,j)\in A_4}\{\Psi_i^{-1}(x,\ \beta)+STF_{ij}-(\Phi_j^{-1}(1-\beta)+x_j)\}\end{cases}$$

同理，$T(x,\ \zeta)$ 为不确定变量，其逆不确定分布为

$$\Psi^{-1}(x,\ \beta)=max\{\Psi_j^{-1}(x,\ \beta)+\Phi_i^{-1}(\beta)+x_j\},\ 1\le j\le n. \quad (3)$$

且 $C(x,\ \zeta)$ 也为不确定变量，其逆不确定分布为

$$\Upsilon^{-1}(x,\alpha)=\sum\left(c_i\Phi_i^{-1}(\alpha)-d_ix_i\right),\ i\in V \quad (4)$$

1.3 建立工期机会最大化模型

针对国家重点工程、灾后重建等项目，管理者更关注工期优化问题。考虑到实际工程项目中工序间存在的搭接关系，我们将四种基本搭接关系统一表示为延迟时距引入项目完工时间的计算中，进而构建考虑延迟时距的不确定工期 - 费用优化模型。该模型中目标为项目按期完工的可能性最大，约束为项目总费用尽可能不超支。

$$\begin{cases}max\mathrm{M}\{T(x,\ \zeta)\le T_0\}\\ s.t.\\ \mathrm{M}\{C(x,\ \zeta)\le C_0\}\ge\alpha\\ T_j(x,\ \zeta)=\max\limits_{(i,j)\in Aa}\{T_i(x,\ \zeta)+\zeta_i+x_i+T_{ij}\}\\ x_i\in[l_i,\ u_i],\ x_i\in Z,\ i\in V.\end{cases} \quad (5)$$

式中：T_0—项目的计划工期；C_0—项目的预算费用；α—事先给定的置信水平；u_i、l_i—可控制持续时间的上、下界值；Z—整数集；而 $T(x,\ \zeta)$ 和 $C(x,\ \zeta)$ 分别由式 (1) 和 (2) 确定。

定理 1 设所有工序的正常持续时间 $\zeta=\{\zeta_i\,|\,i\in V\}$ 为独立的不确定变量，分别具有正则的不确定分布 Φ_i，$1\le j\le n.$ 则模型 (5) 等价于如下模型：

$$\begin{cases}max\beta\\ s.t.\\ \Psi^{-1}(x,\ \beta)=T_0\\ \Upsilon^{-1}(x,\ \alpha)\pounds C_0\\ \Psi_j^{-1}(x,\ \beta)=\max\limits_{(i,j)\hat{1}A}\{\Psi_i^{1}(x,\ \beta)+\Phi_i^{-1}(\beta)+x_i+\Psi_{ij}^{1}(\beta)\}\\ x_i\ 挝\ [l_i,\ u_i],\ x_i\ Z,\ i?V.\end{cases} \quad (6)$$

式中：β—项目按期完工的可能性；$\Upsilon^{-1}(x,\ \alpha)$ 和 $\Psi^{-1}(x,\ \beta)$ 分别由式 (3) 和 (4) 确定。

证明：设所有工序的正常持续时间 $\zeta=\{\zeta_i\,|\,i\in V\}$ 为独立的不确定变量，分别具有正则的不确定分布 Φ_i，$1\le j\le n.$ 由式 (2)、(4) 及不确定机会约束定理 [7] 知，不确定测度

$$\mathrm{M}\{C(x,\ \zeta)\ -\ C_0\le 0\}\ge\alpha$$

成立，当且仅当

$$\Psi_C^{-1}(x,\ \alpha)\ -\ C_0\ ?\ 0.$$

由式 (1)、(3) 及不确定测度等价转化定理 [8] 知，不确定测度

$$\mathrm{M}\{T(x,\ \zeta)\ -\ T_0\le 0\}$$

为如下等式的根 β

$$\Psi_T^{-1}(x,\ \beta)\ -\ T_0=0.$$

由不确定变量的逆分布定理 [7] 知，不确定变量 $T_j(x,\ \zeta)$ 的逆不确定分布 $\Psi_j^{-1}(x,\ \beta)$ 为

$$\Psi_j^{-1}(x,\ \beta)=\max\limits_{(ij,)\in A}\{\Psi_T^{-1}(x,\ \beta)+\Phi_i^{-1}(\beta)+x_i+\Psi_{ij}^{-1}(\beta)\}$$

因此，模型 (5) 等价于模型 (6).

2 工程案例

项目中各工序间的逻辑关系可用上述网络图 1 表示。根据工序持续时间是否受管理者制定的调度方案影响，分为正常持续时间和可控制持续时间，其中所有的工序正常持续时间 $\zeta=\{\zeta_i\,|\,i\in V\}$ 设为独立的线性不确定变量，服从 $L(2\bar{k}+3,\ 2i+2)$ 其中 $\bar{k}=min\{k|(k,\ i)\in E\}$，$1<k<i<18.$ 由线性不确定变量的逆分布定义 [7] 知，不确定变量 ζ_i 的逆不确定分布 $\Phi_i^{-1}(\beta)=(2\bar{k}+3)\times(1\ -\ \beta)+(2i+2)\times\beta.$ 可控制持续时间为决策变量，在区间 [-4，3] 内取整数，与持续时间相对应的工序费用分别为单位正常费用 c_i 和单位额外费用 d_i，如表 1 所示 [3]。同时，该项目的预算费用 C_0 为 58 900 个单位，计划工期 T_0 为 66 个单位，置信水平 α 为 0.85。

表 1 项目中工序费用一览表

Tab.1 Activity costs of project

工序	c_i	d_i	工序	c_i	d_i
A	170	200	I	85	100
B	300	280	J	300	400
C	65	70	K	95	90
D	270	300	L	130	140
E	135	150	M	200	240
F	75	90	N	90	120
G	150	100	O	200	180
H	600	400	P	320	380

将工程案例中基本数据代入工期机会最大化模型，得到模型 (7) 为

$$\begin{cases} max\mathrm{M}\{T(x,\ \xi)\le 66\} \\ s.t. \\ \mathrm{M}\{C(x,\ \xi)\le 58\ 900\}\ge 0.85 \\ T_j(x,\ \xi)=\max\limits_{(i,j)\in A}\{T_i(x,\ \xi)+\xi_i+x_i+T_{ij}\} \\ x_i\in[-4,\ 3],\ x_i\in Z,\ 1\le i<j\le 18. \end{cases} \tag{7}$$

由定理 1 知，不确定规划模型 (7) 等价转化为确定模型 (8)，即

$$\begin{cases} max\beta \\ s.t. \\ \Psi^{-1}(x,\ \beta)=66 \\ \Upsilon^{-1}\ (x,\ 0.85)\ £\ 58\ 900 \\ \Psi_j^{-1}(x,\ \beta)=\max\limits_{(i,j)\mathrm{L}A}\{\Psi_i^{-1}(x,\ \beta)+\Phi_i^{-1}(\beta)+x_i+\Psi_{ij}^{-1}(\beta)\} \\ x_i\ ?[4,\ 3],\ x_i\ 挝\ Z,\ i\ \ V. \end{cases} \tag{8}$$

利用 LINGO 求得模型 (8) 最优解 x^*=(3，3，-4，3，0，-1-1，2，3，3，-1，3，3，-4，3，0) 和 $\mathrm{M}\{T(x,\ \xi)\le 66\}=0.844$.

注：在该模型中，项目按期完工的可能性为 0.844，且实际费用比预算费用少 74.25 个单位。通过计算网络图中线路长度可知，与关键线路长度 (66 个单位) 的差值在 1 个单位以内的线路共 6 条。因此，通过合理分配有限资源在工序的使用量调整工序持续时间，达到项目工期与费用之间优化目的。

3 结论

1) 本文的研究侧重于在目标工期上有要求的项目，结合工程项目的实际情况，构建了以项目按期完工的可能性最大为目标的规划模型。由于该模型可转化为确定模型，所以其具有可操作性。

2) 通过分析模型的优化结果，计算出了项目中各工序的持续时间。这一方面为管理者确定项目的重点控制目标提供理论依据，另一方面帮助管理者合理地分配项目中可利用的有限资源并实现项目的优化目标。因此，所建的模型具有实用性。

参考文献：

[1]LIU B D.Uncertainty Theory[M]. 2nd ed. Berlin：Springer-Verlag，2007.

[2]LIU B D.Theory and Practice of Uncertain Programming[M].Berlin：Springer-Verlag，2009.

[3]KE H，LIU H，TIAN G.Optimizing project time-cost trade-off based on uncertain measure[J]，https：//www.docin.com/p-1512887514，2013.

[4]CRANDALL.Project planning with precedence lead/lag factors[J]. Project Management Quarterly，1973，4(3)：18-27.

[5] 杨 冰 . 网络计划计算模型的统一 [J]. 系统工程理论与实践，2002，22(3)：51-55.

[6] 贺兆泽 . 考虑工时相依性的施工工期优化研究 [D]. 兰州：兰州交通大学，2016.

[7]LIU B D. Uncertain Theory：A Branch of Mathematics for Modeling Human Uncertainty[M].Berlin：Springer-Verlag，2010.

[8]LIU B D.Uncertain risk analysis and uncertain reliability analysis[J]. Journal of Uncertain Systems，2010，4(3)：163-170.

（责任编辑 李新）

（上接第 87 页）

[13] 彭远玲，李文欣，韦科娟，等 . 竖直地埋管热相似试验台原理及试验验证 [J]. 暖通空调，2018，48(9)：45-49.

[14] 王 丰 . 相似理论及其在传热学中的应用［M］. 北京：高等教育出版社，1990：105-163

[15]PARKIN A K，LUNNE T. Boundary effects in the laboratory calibration of a cone penetrometer[J]. Norwegian Geotechnical Institute Publication，1982.

[16]FIORAVANTE V. On the Shaft Friction Modelling of Non-Displacement Piles in Sand.[J]. Journal of the Japanese Geotechnical Society Soils & Foundation，2002，42(2)：23-33.

[17]NGUYEN V T，TANG A M，PEREIRA J M. Long-term thermo-mechanical behavior of energy pile in dry sand[J]. Acta Geotechnica，2017(3)：1-9.

[18] 黄 旭，孔纲强，刘汉龙，等 . 循环温度场作用下 PCC 能量桩热力学特性模型试验研究 [J]. 岩土力学，2015，36(3)：667-673.

（责任编辑 李新）