

文章编号:1673-9469(2022)03-0036-07

DOI:10.3969/j.issn.1673-9469.2022.03.006

基于最大能量耗散率原理的黄土本构模型参数的研究

付成博¹, 范文^{1,2,3}, 邓龙胜^{1,3}, 马利锋⁴, 魏亚妮^{1,3*}

(1. 长安大学 地质工程与测绘学院, 陕西 西安 710054; 2. 信息产业部电子综合勘察研究院, 陕西 西安 710054; 3. 西部矿产资源与地质工程教育部重点实验室, 陕西 西安 710054; 4. 西安交通大学 工程力学系, 陕西 西安 710049)

摘要: 基于最大能量耗散率原理的黄土弹塑性本构模型, 设计出获取该模型参数的室内试验方案, 并以泾阳南塬为研究区域, 研究不同含水率下 Q_3 马兰黄土本构参数的取值范围和硬化函数的形式。研究表明: 泾阳南塬 Q_3 马兰黄土塑性剪应变的硬化函数呈双曲线型, 其参数 a 取值范围在 0.002 至 0.02 之间, 参数 b 在 0.01 至 0.05 之间; 塑性体应变的硬化函数呈三次函数型, 其参数 m_1 、 m_2 、 m_3 取值在 0.001 至 1 之间; 体积模量 K 取值在 40 MPa 至 130 MPa 之间, 剪切模量 G 取值在 20 MPa 至 60 MPa 之间; 与试验数据对比验证, 该本构模型通过试验方案取得的参数, 可以准确地描述泾阳南塬 Q_3 马兰黄土的应力应变关系。

关键词: 黄土; 本构模型; 本构参数; 室内试验; 泾阳南塬

中图分类号: TU42

文献标识码: A

Study on Parameters of Loess Constitutive Model for Elastic-plastic Deformation Based on the Principle of Maximum Energy Dissipation Rate

FU Chengbo¹, FAN Wen^{1,2,3}, DENG Longsheng^{1,3}, MA Lifeng⁴, WEI Yani^{1,3*}

(1. School of Geology Engineering and Geomatic, Chang'an University, Xi'an, Shanxi 710054, China; 2. China Electronic Research Institute of Engineering Investigation and Design, Xi'an, Shanxi 710054, China; 3. Key Laboratory of Western China's Mineral Resources and Geological Engineering, Ministry of Education, Xi'an, Shanxi 710054, China; 4. Department of Engineering Mechanics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shanxi 710049, China)

Abstract: The traditional loess constitutive model is mainly composed of elastic model and elastic-plastic model. However, the assumption of elastic model on soil is too simple, and the elastic-plastic model sometimes does not meet the law of thermodynamics. Therefore, the loess constitutive model for elastic-plastic deformation based on the principle of maximum energy dissipation rate is more rigorous. Based on the constitutive model, a laboratory test scheme was designed to obtain the parameters of the model. Taking Southern Jing-Yang plateau as the study area, the value range of constitutive parameters and the form of hardening function of Q_3 Malan loess under different water content were studied. The results show that: the hardening function of the plastic shear strain of Q_3 Malan loess in Southern Jing-Yang plateau is hyperbolic, the value of parameter a ranges from 0.002 to 0.02, and that of parameter b ranges from 0.01 to 0.05; the hardening function of the plastic body strain is cubic, and its parameters m_1 、 m_2 、 m_3 are between 0.001 and 1; the volume modulus K ranges from 40 MPa to 130 MPa and the shear modulus G ranges from 20 MPa to 60 MPa; compared with the experimental data, the constitutive model can accurately describe the stress-strain relationship of Q_3 Malan loess in Southern Jing-Yang plateau by using the parameters obtained from the experimental scheme.

Key words: loess; constitutive model; constitutive parameters; laboratory test; southern Jing-Yang plateau

收稿日期: 2022-03-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(41630634, 42002285, 41877245)

作者简介: 付成博(1996-), 男, 内蒙古包头人, 硕士研究生, 从事黄土方面的研究。

* 通讯作者: 魏亚妮(1986-), 女, 陕西兴平人, 博士, 讲师, 从事黄土、微结构方面的研究。

在分析黄土应力-应变的关系时,工程上常用到的本构模型一般分为两类^[1-7]:第一类是弹性模型,主要是将岩土体视为弹性体,从而建立起线性或者非线性的应力-应变关系,例如 Love 提出线弹性模型和邓肯等人提出的一些非线性弹性模型^[8],但黄土不能简单地被视为弹性或非线性弹性材料,这些模型在用于单调加载的情况时的结果得到较为准确,但用于复杂加载的情况时,结果往往不能符合工程的要求^[9-10];第二类是弹塑性模型,以 Drucker 公设和 Iliushin 塑性公设为理论基础,借由经典塑性力学本构中的屈服条件、流动法则、硬化规律等几个要素,通过数学推导得到其本构模型,例如 Lade-Duncan 模型、剑桥模型等^[11],但许多学者经过研究和试验后^[12-16],认为塑性力学中的几个要素在岩土体本构中往往都是单独确定的,不够严谨,从而导致在一些应力路径上会出现违反热力学基本定律的情况^[17]。西安交通大学马利锋教授认为应该从热力学第一定律和第二定律出发,同时将最大能量耗散率原理视为同等的热力学定律,以此建立起弹塑性增量本构模型,其本构模型遵循热力学基本定律^[18],能很好地描述黄土的应力应变关系。

本文基于前人的研究,选择泾阳南塬为研究区域,设计出一套适用于基于最大能量耗散率原理的黄土本构模型的试验方案,确定其硬化函数的形式,研究在不同含水率下该本构模型参数的取值范围,并验证模型及参数的准确性。

1 基于最大能量耗散率原理的黄土弹塑性本构模型

本文采用西安交通大学马利锋教授提出的基于最大能量耗散率原理的黄土弹塑性本构模型^[18],其本构模型的基础理论是热力学第一定律和第二定律,并将最大能量耗散率原理视为等同的定律。下文将简单介绍其本构模型的主要内容。

在小变形假设下,岩土体总应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 可分为弹性部分 ε_{ij}^e 和塑性部分 ε_{ij}^p :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (1)$$

在变形过程中,应满足热力学第一定律和热力学第二定律:

$$\rho\dot{u} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - q_{k,k} + \rho\dot{r} \quad (2)$$

$$\dot{d} = \rho T\dot{\omega} = \rho T\dot{s} - \rho\dot{r} + q_{k,k} - \frac{q_k}{T}, k \geq 0 \quad (3)$$

式中: σ_{ij} —应力张量; ε_{ij} —应变张量; ρ —材料密度; \dot{u} —材料的比内能密度函数,可以用变量 ε_{ij}^e 和 T 表示; q_k —单位时间内每单位表面积的热量流出; \dot{r} —物体热量或辐射; \dot{d} —能量耗散率; T —绝对温度; $\dot{\omega}$ —比熵产率; s —熵密度。

假设这个变形是绝热过程($q_k = 0$)或等温过程($T, k = 0$),只考虑机械能耗散,且变量 ε_{ij}^e 和 T 的变化不影响变量 \dot{d} 的变化,联立式(1)、式(2)和式(3)可得:

$$\dot{d} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (4)$$

将应力(应变)分解成体积和偏差分量:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{1}{3}\varepsilon_v \delta_{ij} \end{cases} \quad (5)$$

式中: σ_m —静水应力; ε_v —一体应变; s_{ij} —偏应力; e_{ij} —偏应变。

对于各向同性材料的塑性变形,式(4)要求满足最大能量耗散率原理,并且由于 $s_{ii} = 0, e_{ii} = 0$,式(4)可以重新写成:

$$\dot{d} = s_{ij}\dot{e}_{ij}^p + \sigma_m \dot{\varepsilon}_v^p = \max \geq 0 \quad (6)$$

在塑性变形过程中的任何时候,变形能耗散率与等张变形能耗散率是独立的,但应同时满足最大能量耗散率。即塑性变形方向应与相应的应力方向相同:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij}d\eta \\ d\varepsilon_v^p = g(\sigma_m)d\chi \end{cases} \quad (7)$$

等式(7)也就是基于最大能量耗散率原理推导出来,取代了 Drucker 公设,建立了塑性变形的流动规律,式中 $\dot{\eta}$ 和 $\dot{\chi}$ 的表达式将由试验获得的两个硬化函数确定:

$$\begin{cases} s_i = H(e_i^p) \\ \sigma_m = V(\varepsilon_v^p) \end{cases} \quad (8)$$

由偏应力强度 $s_i = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$ 和偏塑性应变增

量强度 $de_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}de_{ij}^p de_{ij}^p}$ 以及试验确定的硬化函数式(8),重新定义式(7)可以得到:

$$\begin{cases} d\eta = \frac{3}{2} \frac{de_i^p}{s_i} = \frac{3}{2} \frac{ds_i}{s_i H'(e_i^p)} \\ d\chi = \frac{d\varepsilon_v^p}{g(\sigma_m)} = \frac{d\sigma_m}{g(\sigma_m) V'(\varepsilon_v^p)} \end{cases} \quad (9)$$

结合式(1)和弹性力学相关公式,增量弹塑性本构关系为:

$$\begin{cases} d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{2G}ds_{ij} + \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{s_i} \frac{ds_i}{H'(e_i^p)} \\ d\epsilon_v = d\epsilon_v^e + d\epsilon_v^p = \left[\frac{1}{3K} + \frac{1}{3V'(\epsilon_v^p)} \right] d\sigma_m \end{cases} \quad (10)$$

式中: G —剪切模量,MPa; K —体积模量,MPa。

式(10)即为基于最大能量耗散率原理推导出的增量弹塑性本构模型。

2 针对模型参数的试验设计

2.1 模型参数

增量弹塑性本构式(10)所需参数为弹性参数:剪切模量 G 和体积模 K ;硬化函数: $H(e_i^p)$ 和 $V(\epsilon_v^p)$ 。

通过不同含水率和围压的三轴试验表明,泾阳南塬 Q_3 马兰重塑黄土体呈现应变硬化型特征,弹性参数参考邓肯-张(Duncan-Chang)模型^[8],通过其剪应力-轴向应变关系的曲线计算获得各工况下的弹性模量 E_i 和泊松比 ν ,然后利用弹性力学相关公式计算获得剪切模量 G 和体积模量 K 。

参考简布对压缩试验的研究,拟合获得土体弹性模量随围压变化的公式:

$$E_i = k \cdot Pa \cdot \left(\frac{\sigma_3}{Pa} \right)^n \quad (11)$$

式中: k —拟合参数; n —拟合参数; σ_3 —围压,kPa; Pa —标准大气压,101.4 kPa。

在室内三轴试验应力条件下 $\sigma_2 = \sigma_3$,试样的应力状态可以由下式表示:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3) \quad (12)$$

$$s_i = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (13)$$

式中: σ_m —静水应力,kPa; s_i —剪应力,kPa。

对于应力应变的定义,土的应变状态可以分解为纯体积应变 ϵ_v 和剪切应变 e_i (即偏应变不变量)。在室内三轴试验应力条件下 $\epsilon_2 = \epsilon_3$,试样的体应变 ϵ_v 和剪应变 e_i 可以由下面两式表示:

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_3 \quad (14)$$

$$e_i = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3) = \left(\epsilon_1 - \frac{1}{3}\epsilon_v \right) \quad (15)$$

式中: ϵ_1 —轴向应变,%; ϵ_3 —侧向应变,%。

对于弹塑性力学的定义,土的应变状态可以分解为弹性应变和塑性应变。假设纯剪切不引起

弹性体积应变,弹性体积应变的变化完全是由于静水应力增量 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$ 引起的^[19]。通过三轴加卸载试验,将总体应变 ϵ_v 和总剪应变 e_i 分解成弹性应变和塑性应变,即对于应变 ϵ 来说,卸载前为总应变 ϵ ,卸载后为塑性应变 ϵ^p ,其差值为弹性应变 ϵ^e 。试样的体应变 ϵ_v 和剪应变 e_i 可以由下面两式表示:

$$\epsilon_v = \epsilon_v^e + \epsilon_v^p \quad (16)$$

$$e_i = e_i^e + e_i^p \quad (17)$$

对于增量弹塑性本构式(10),需要的硬化函数 $H(e_i^p)$ 、 $V(\epsilon_v^p)$,在三轴试验的应力应变状态下可以表示为下面两个函数:

$$\begin{cases} s_i = H(e_i^p) = H\left(\epsilon_1^p - \frac{1}{3}\epsilon_v^p\right) \\ \sigma_m = V(\epsilon_v^p) = V(\epsilon_1^p + \epsilon_2^p + \epsilon_3^p) \end{cases} \quad (18)$$

通过试验得到剪应力 s_i 和塑性剪应变 e_i^p 的曲线,呈现双曲线形式,可确定其表达形式为:

$$s_i = \frac{e_i^p}{a + be_i^p} \quad (19)$$

式中: a —拟合参数; b —拟合参数。

对于静水应力 σ_m 和塑性体应变 ϵ_v^p 的曲线,参考清华弹塑性模型^[20]和殷宗泽对大量击实土等向加载试验的研究结果中硬化参数的确定方法^[21],可确定其表达形式为:

$$\sigma_m = p_a [m_1 \epsilon_v^p - m_2 (\epsilon_v^p)^2 + m_3 (\epsilon_v^p)^3] \quad (20)$$

式中: m_1 —拟合参数; m_2 —拟合参数; m_3 —拟合参数。

2.2 针对模型参数的试验方案设计

工程上黄土含水率范围通常在 5% 到 20% 之间^[22],在此范围内,选定 10%、14%、18% 三组含水率,通过一次性静压力制样法压制干密度为 1.30 g/cm³ 的重塑土样,使用英国 GDS 公司生产的非饱和应力路径的三轴仪进行固结不排水试验,具体试验工况见表 1。

试验由三部分构成:试验一为工况 JY 1-1 到 JY 3-3 下正常加载的固结不排水三轴剪切试验,计算相关弹性参数并确定试样破坏时的应力以便进行后续试验;试验二为工况 JY 1-1 到 JY 3-3 下应力控制的三轴加卸载试验,在试样固结后,进行多级加卸载,直至试样破坏,加卸载期间不排水,加卸载速率为 2.5 kPa/min,拟合确定硬化函数 $H(e_i^p)$;试验三为工况 JY 4-1 到 JY 4-3 下各向等压的压缩试验,每加载 100 kPa 卸载一次,然后以

相同的速率重新加载,最高加载至 700 kPa,加卸载速率为 2.5 kPa/min,加卸载期间不排水,拟合确定硬化函数 $V(\varepsilon_v^p)$ 。

表 1 试验工况

Tab. 1 Test conditions

试验编号	含水率 $\omega/\%$	围压 σ_3/kPa
JY 1-1	10	100
JY 1-2	10	200
JY 1-3	10	300
JY 2-1	14	100
JY 2-2	14	200
JY 2-3	14	300
JY 3-1	18	100
JY 3-2	18	200
JY 3-3	18	300
JY 4-1	10	各向等压
JY 4-2	14	各向等压
JY 4-3	18	各向等压

3 模型参数取值及验证

3.1 研究区概况

本文试验所用的试样取于泾阳南塬的 Q_3 马兰黄土,其基本的物理力学指标如表 2 所示。

表 2 泾阳南塬的 Q_3 马兰黄土基本物理指标

Tab. 2 Basic physical indexes of Q_3 Malan loess in

Southern Jing-Yang plateau					
含水率 $\omega/\%$	天然密度 $\rho/(g \cdot cm^{-3})$	干密度 $\rho_d/(g \cdot cm^{-3})$	液限 $\omega_L/\%$	塑限 $\omega_p/\%$	塑性 指数 $I_p/\%$
4.37	1.35	1.29	30.37	18.46	11.91

3.2 弹性参数

由试验一,可得不同含水率下的应力-应变曲线,如图 1 所示,来确定模型的弹性参数。

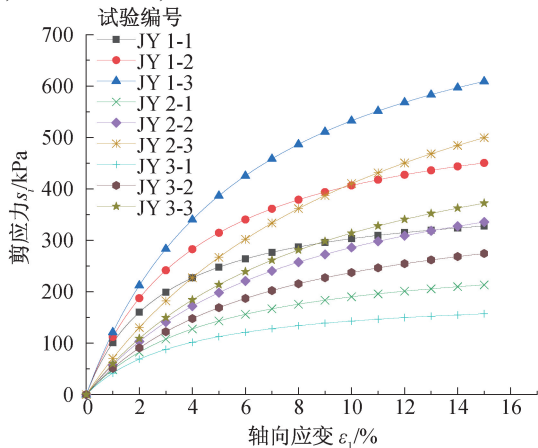


图 1 不同含水率的土体应力-应变曲线

Fig. 1 Stress-strain curves of soil with different moisture contents

参考土工试验规范,拟合计算其初始弹性模量 E_i (MPa),其结果见表 3。

表 3 不同围压下不同含水率的初始弹性模量 E_i (单位:MPa)

Tab. 3 Initial elastic modulus E_i of different moisture contents under different confining pressures

围压 σ_3/kPa	含水率 $\omega/\%$		
	10	14	18
100	135.501 4	58.163 4	53.096 4
200	138.962 6	64.656 6	58.704 6
300	141.252 5	76.450 3	66.881 9

通过拟合计算出的初始弹性模量 E_i (MPa),按式(11)进行拟合参数 k, n ,其拟合结果见图 2,其结果见表 4。

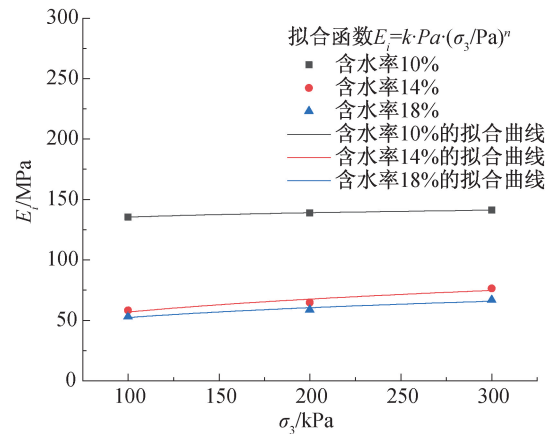


图 2 不同含水率的土体弹性模量拟合结果

Fig. 2 Fitting results of elastic modulus of soil with different moisture contents

表 4 不同含水率的弹性模量 E_i 的参数 k, n

Tab. 4 Parameters k, n of elastic modulus E_i of different moisture contents

含水率 $\omega/\%$	k	n
10	1.332 38	0.047 18
14	0.562 95	0.248 63
18	0.508 57	0.251 50

试验表明,参数 k 取值在 0.5 至 1.5 之间,随含水率增大而逐渐减小;参数 n 取值在 0.04 至 0.3 之间,随含水率增大而增大。

参考土工试验规范计算得出泾阳南塬 Q_3 马兰黄土在不同固结围压下的泊松比 ν 值近似相等,结果如表 5 所示。

通过弹性力学相关公式,计算获得体积模量 K 、剪切模量 G 。试验结果表明,泾阳南塬 Q_3 马兰黄土泊松比为 0.3,可视为常数;弹性模量 E_i 取值在 50 MPa 至 150 MPa 之间,体积模量 K 取值在

40 MPa 至 130 MPa 之间,剪切模量 G 取值在 20 MPa 至 60 MPa 之间。

表 5 不同围压下不同含水率的泊松比 ν

Tab. 5 Poisson's ratio ν of different water contents under different confining pressures

围压 σ_3/kPa	含水率 $\omega/\%$		
	10	14	18
100	0.295	0.292	0.294
200	0.294	0.294	0.294
300	0.293	0.294	0.295

3.3 $H(e_i^p)$ 硬化函数

通过试验二,将每级剪应力卸载后的轴向应变和体应变数据进行处理,绘制出剪应力 s_i 和塑性剪应变 e_i^p 的散点图,按式(19)进行拟合参数 a 、 b ,拟合结果见图 3,其结果见表 6。

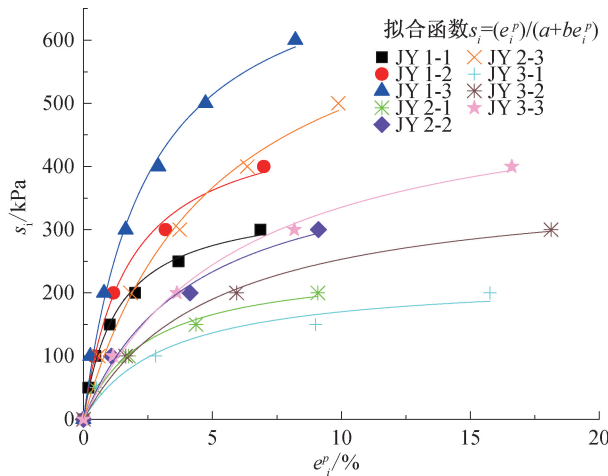


图 3 $H(e_i^p)$ 硬化函数拟合结果

Fig. 3 Fitting results of hardening function $H(e_i^p)$

表 6 $H(e_i^p)$ 硬化函数拟合参数 a 、 b 结果

Tab. 6 Results of hardening function $H(e_i^p)$ fitting parameters a and b

试验编号	a	b
JY 1-1	0.003 81	0.002 88
JY 1-2	0.003 52	0.002 06
JY 1-3	0.003 20	0.001 31
JY 2-1	0.009 96	0.004 05
JY 2-2	0.009 85	0.002 32
JY 2-3	0.006 90	0.001 35
JY 3-1	0.014 37	0.004 44
JY 3-2	0.013 13	0.002 64
JY 3-3	0.011 11	0.001 87

试验表明,同一围压下在相同的剪应力下,随含水率增大塑性剪应变增大,并且围压越大,塑性

剪应变越小。参数 a 取值范围在 0.002 至 0.02 之间,随含水率增大而增大,随围压增大而减小;参数 b 取值范围在 0.01 至 0.05 之间,随含水率增大而增大,随围压增大而减小。

3.4 $V(\varepsilon_v^p)$ 硬化函数

通过试验三,将每级静水应力和卸载后的体应变数据进行处理,绘制出静水应力 σ_m 和塑性体应变 ε_v^p 的散点图,按式(20)进行拟合参数 m_1 、 m_2 、 m_3 ,其拟合结果见图 4,其结果见表 7。

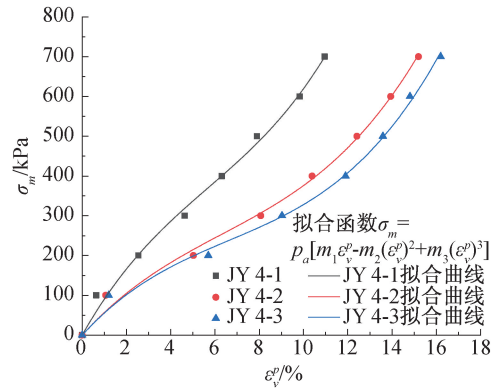


图 4 $V(\varepsilon_v^p)$ 硬化函数拟合曲线

Fig. 4 Fitting results of hardening function $V(\varepsilon_v^p)$

表 7 $V(\varepsilon_v^p)$ 硬化函数拟合参数 m_1 、 m_2 、 m_3 结果

Tab. 7 Results of hardening function $V(\varepsilon_v^p)$ fitting parameters m_1 , m_2 and m_3

试验编号	m_1	m_2	m_3
JY 4-1	0.973 7	0.087 41	0.005 11
JY 4-2	0.607 9	0.050 29	0.002 66
JY 4-3	0.599 2	0.055 47	0.002 79

试验表明,相同的静水应力下,塑性体应变随含水率增大而增大,曲线呈躺倒的“反 S”型,即在静水应力较小时,未产生大量的塑性体应变,以弹性应变为主,初期塑性体应变值较小,曲线初始斜率较大;随着静水应力增大,开始产生大量塑性体应变,中后期塑性体应变增量较大,曲线的中期斜率变小;但随着静水应力进一步增大,试样变形达到极限值,大多数孔隙已经被压缩,试样被进一步压实,没有更多孔隙可以被压缩,塑性体变增加变小,曲线的后期斜率变大,最后趋近于一个极限值。参数 m_1 取值在 0.5 至 1 之间, m_2 取值在 0.05 至 1 之间, m_3 取值在 0.001 至 0.01 之间。

3.5 模型参数验证

通过上文试验确定的参数,基于试验一的试

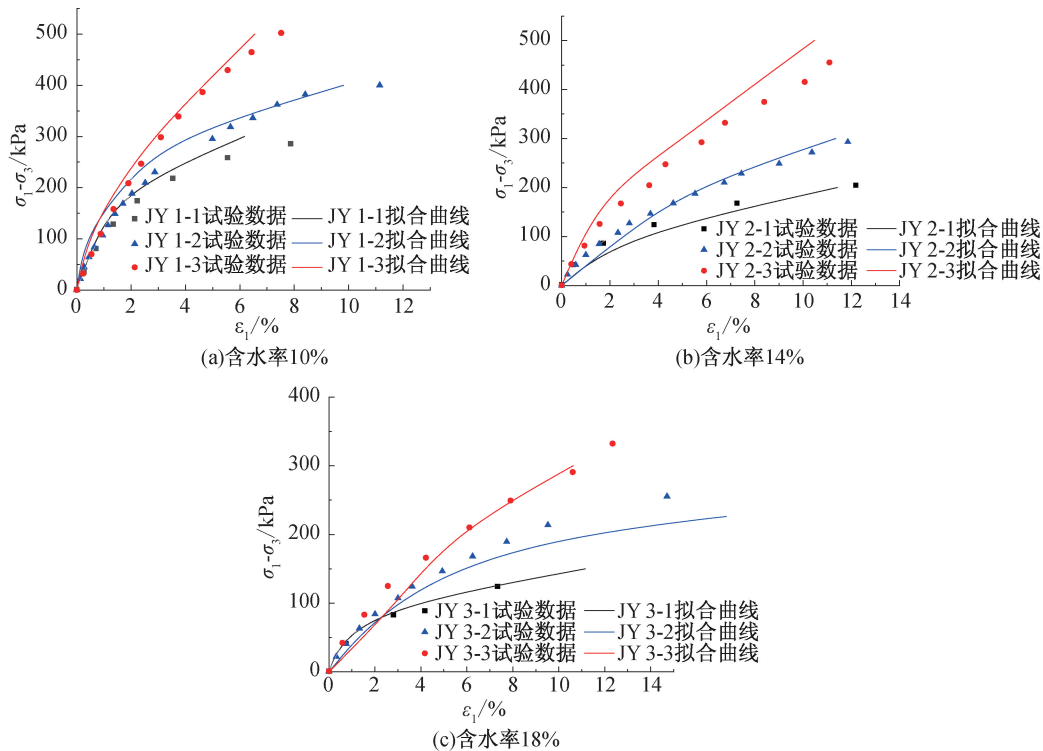


图5 本构参数及模型的验证

Fig. 5 Validations of constitutive parameters and model

验数据,验证在不同工况下基于最大能量耗散率原理的黄土弹塑性本构模型的适用性,其结果如图5所示。

拟合结果表明,基于最大能量耗散率原理的黄土弹塑性本构模型,使用通过本文试验方案确定出的硬化函数形式以及拟合得出的参数,经验证后能够准确地反映常规三轴试验下泾阳南塬的 Q_3 马兰黄土的应力-应变关系。

4 结论

1) 在基于最大能量耗散率原理的黄土弹塑性本构模型中,参数分为弹性参数和塑性参数两类。可通过常规三轴剪切试验获得的弹性参数 k 、 n 、 ν , 计算到弹性模量 E_i 、剪切模量 G 、体积模量 K ;通过三轴加卸载试验确定硬化函数 $H(e_i^p)$ 的形式及参数 a 、 b ;通过各向等压的压缩加卸载试验确定硬化函数 $V(\varepsilon_v^p)$ 的形式及参数 m_1 、 m_2 、 m_3 。

2) 泾阳南塬 Q_3 马兰黄土体积模量 K 取值在40 MPa至130 MPa之间,剪切模量 G 取值在20 MPa至60 MPa之间;塑性参数 a 取值在0.002至0.02之间,参数 b 在0.01至0.05之间,参数 m_1 取值在0.5至1之间, m_2 取值在0.05至1之间, m_3 取值在0.001至0.01之间。

3) 对基于最大能量耗散率原理的黄土弹塑性本构模型进行验证,验证结果表明该本构模型通过本文试验方案取得的模型参数能够准确描述泾阳南 Q_3 马兰黄土在三轴剪切下的应力-应变关系。

参考文献:

- [1] 张嘎,王刚,尹振宇,等. 土的基本特性及本构关系[J]. 土木工程学报,2020,53(2):105-118.
- [2] 李文,龙建辉,李同录,等. 陕西泾阳南塬黄土滑坡带土残余剪切强度特性[J]. 地球科学与环境学报,2012,34(4):95-101.
- [3] 胡志平,温馨,张勋,等. 湿陷性黄土地区海绵城市建设研究进展[J]. 地球科学与环境学报,2021,43(2):376-388.
- [4] 黄茂松,姚仰平,尹振宇,等. 土的基本特性及本构关系与强度理论[J]. 土木工程学报,2016,49(7):9-35.
- [5] 姚仰平,张丙印,朱俊高. 土的基本特性、本构关系及数值模拟研究综述[J]. 土木工程学报,2012,45(3):127-150.
- [6] GAO Z, ZHAO J, YAO Y. A Generalized Anisotropic Failure criterion for Geomaterials[J]. International Journal of Solids and Structures,2010,47(22-23):3166-3185.
- [7] SUN D A, HUANG W X, SHENG D C, et al. An Elastoplastic Model for Granular Materials Exhibiting Particle

- Crushing [C]. Key Engineering Materials. Trans Tech Publications Ltd, 2007, 340:1273-1278.
- [8] DUNCAN J M, CHANG C Y. Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, 96(5):29-53.
- [9] ALONSO E E, GENS A, JOSA A. A Constitutive Model for Partially Saturated Soils [J]. Géotechnique, 1990, 40(3):405-430.
- [10] KOHGO Y, NAKANO M, MIYAZAKI T. Theoretical Aspects of Constitutive Modelling for Unsaturated Soils [J]. The Japanese Geotechnical Society, 1993, 33(4):49-63.
- [11] 徐舜华, 徐光黎, 程 瑶. 土的剑桥模型发展综述 [J]. 长江科学院院报, 2007, 24(3):27-32.
- [12] 刘元雪. 岩土本构理论的几个基本问题研究 [J]. 岩土工程学报, 2001, 23(1):45-48.
- [13] 郭晓霞. 力学方法在土体本构模型中的应用研究 [D]. 大连:大连理工大学, 2009.
- [14] 孔 亮, COLLINS I F. 模拟土体本构特性的热力学方法 [J]. 岩土力学, 2008, 17(7):32-40.
- [15] 秦理曼, 迟世春, 林 皋. 基于能量耗散的土体本构关系及其参数确定 [J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(S2):5625-5633.
- [16] 胡亚元. 关于率无关塑性力学和广义塑性力学的评述 [J]. 岩土工程学报, 2005, 27(1):128-131.
- [17] 曲圣年, 殷有泉. 塑性力学的 Drucker 公设和 Ильюшин 公设 [J]. 力学学报, 1981(5):465-473.
- [18] MA L, ALEXANDER K, MARIAN W. A Rational Framework for Elastic-Plastic Deformation and Damage Modelling Based on the Principle of Maximum Energy Dissipation Rate [J]. International Journal of Mechanical Sciences, in press.
- [19] 黄文熙, 濮家骝, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数 [J]. 岩土工程学报, 1981, 3(3):19-26.
- [20] 李广信. 土的清华弹塑性模型及其发展 [J]. 岩土工程学报, 2006, 28(1):1-10.
- [21] 殷宗泽. 一个土体的双屈服面应力-应变模型 [J]. 岩土工程学报, 1988, 10(4):64-71.
- [22] 范 敏, 倪万魁. 黄土高原地区公路路基土性参数统计分析 [J]. 地球科学与环境学报, 2006, 28(2):75-79.

(责任编辑 王利君)