文章编号:1673-9469(2025)01-0043-07　DOI:10.3969/j.issn.1673-9469.2025.01.006

基于 Burgers 体模型的采空区顶板沉降特性研究

李伟华,韩现刚*
(河北工程大学 土木工程学院,河北 邯郸 056038)

摘要: 基于弹性力学理论、薄板小挠度弯曲理论及数学计算,采用 Burgers 体构建顶板挠度方程,研究采空区顶板不同边界条件下挠度随时间的变化关系。研究结果表明,在四边固定情况下,中间挠度最大为 37.77 cm;三边固定一边自由情况下,自由边中间挠度最大,为 46.22 cm。该模型计算结果与现场监测数据大致吻合。

关键词: 采空区;Burgers 体;顶板沉降;边界条件
中图分类号:TD325　**文献标识码:**A

Research on Roof Settlement Characteristics of Goaf Based on Burgers Body Model

LI Weihua, HAN Xiangang*
(School of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Handan, Hebei 056038, China)

Abstract: Based on the theory of elasticity, thin plate small deflection theory and mathematical calculation, the top plate deflection equation was constructed using the Burgers body, and the relationship between the deflection and time under different boundary conditions of the mining area top plate was studied. The research results show that under the condition of four sides fixed, the maximum middle deflection is 37.77 cm, and under the condition of three sides fixed and one side free, the maximum middle deflection of the free side is 46.22 cm. The calculated results of the model are roughly consistent with the field monitoring data.

Key words: mined-out area; Burgers body; roof subsidence; boundary conditions

采空区顶板经常出现存在时间长、暴露面积大的现象,顶板会出现随时间变化的沉降过程,因此顶板稳定性的分析对工程的安全性尤为重要。国内外学者采用不同的理论对顶板-矿柱体系的临界条件与失稳机理进行研究,但对岩体流变的特性研究较少。近年来,大多学者意识到不同的本构模型对研究岩土及地下工程的重要性,并取得了较多的优秀成果。王金安等[1-2]建立了 Kelvin 体本构模型,建立顶板控制方程,在 Kelvin 体未考虑岩体初始弹性变形条件下得到采空区变形随时间发展的关系。李铁等[3]建立了广义 Kelvin 体研究采空区顶板沉降与时间的对应关系,为矿山稳定性评估提供了依据。刘诗杰等[4]以 H-K 体作为岩体本构模型,将采空区顶板沉降过程划分为 3 个阶段,对由矿柱流变引发的顶板沉降变形进行研究,求解并评估分析了各阶段的持续时间。杨振伟等[5]通过 Burgers 体各元件参数的控制变量分析,深入研究了各元件对 Burgers 体性质的影响,进一步解析了 Burgers 体反映岩体性质的机制。孙琦等[6]通过引入 Burgers 体作为岩体本构模型,对顶板流变在未完全进行解析条件下,揭示了采空区的变化特点。但以上研究大多都是建立顶板-矿柱流变体系,单独研究顶板特性的较少,并且为了便于计算忽视了岩体的综合性质。

Burgers 体具有 4 个可调参数,可以较好地描述岩石蠕变第三阶段之前的变形特征,能综合反

收稿日期:2022-04-05
基金项目:国家重点实验室项目(SKLMRDPC19KF04)
第一作者:李伟华(1997—),男,河北邯郸人,硕士研究生,从事岩土稳定性分析与控制方面的研究。
* **通信作者:**韩现刚(1985—),男,河北邯郸人,博士,讲师,从事岩土工程方面的研究。

映岩体的性质。本文作者以王金安等[7]提出的 Winkler 弹性地基梁假设建立采空区顶板模型,基于弹性力学理论、薄板小挠度弯曲理论及数学计算,对单独顶板流变特性进行深入研究。本文采用 Burgers 体构建顶板挠度方程,研究采空区顶板在不同边界条件下挠度随时间的变化关系,并带入实际案例分析,为采空区顶板沉降特性的研究提供了新的理论视角。

1 Burgers 体粘弹性理论

1.1 Burgers 体本构模型

Burgers 体能够全面反映岩体的性质,是一种由 Maxwell 体与 Kelvin 体串联而成的粘弹性体,力学模型如图 1 所示。

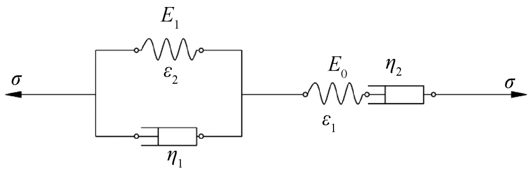

图 1 Burgers 体力学模型
Fig. 1 Burgers' hydrodynamic model

Burgers 本构方程为

$$\sigma + \left(\frac{\eta_2}{E_0} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1}\right)\dot{\sigma} + \frac{\eta_1\eta_2}{E_0E_1}\ddot{\sigma} = \eta_2\ddot{\varepsilon} + \frac{\eta_1\eta_2}{E_1}\dot{\varepsilon} \tag{1}$$

式中,σ、$\dot{\sigma}$ 和 $\ddot{\sigma}$ 分别为应力、应力对时间的一阶导数、应力对时间的二阶导数;ε、$\dot{\varepsilon}$ 和 $\ddot{\varepsilon}$ 分别为应变、应变对时间的一阶导数和应变对时间的二阶导数;E_0 和 E_1 分别为材料的弹性模量、粘弹性模量,Pa;η_1 和 η_2 分别为材料过渡蠕变(第一)阶段的粘弹性系数和常应变率蠕变(第二)阶段的粘弹性系数,Pa·d。

1.2 Burgers 体本构关系

根据粘弹性流变模型一维本构方程,可给出算子形式的通用表达式[8]:

$$P(D)\sigma = Q(D)\varepsilon \tag{2}$$

$$P(D) = \sum_{k=0}^{m} p_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \tag{3}$$

$$Q(D) = \sum_{k=0}^{m} q_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} \tag{4}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} \tag{5}$$

式中,$P(D)$、$Q(D)$、D 为对时间的微分算子。

式(2)可改写为

$$\sigma = \frac{Q(D)}{P(D)}\varepsilon \tag{6}$$

可得 Burgers 体粘弹性模型算子函数的拉普拉斯变换形式为

$$P(D) = 1 + \left(\frac{\eta_2}{E_0} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{E_1}\right)D + \frac{\eta_1\eta_2}{E_0E_1}D^2 \tag{7}$$

$$Q(D) = \eta_2 D + \frac{\eta_1\eta_2}{E_1}D^2 \tag{8}$$

根据弹性力学中弹性剪切模量 G、弹性体积模量 K、弹性模量 E 和泊松比 μ 之间的关系可表述为

$$E = \frac{9GK}{3K + G} \tag{9}$$

$$\mu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \tag{10}$$

$$G(D) = \frac{Q'(D)}{P'(D)} \tag{11}$$

$$K(D) = \frac{Q''(D)}{P''(D)} \tag{12}$$

$Q''(D)$、$P''(D)$ 是反映材料粘弹性体积变形的算子,若材料体积变形呈弹性,由式(12)可知:

$$Q''(D) = K, P''(D) = 1 \tag{13}$$

将式(11)(12)代入式(9)(10)得:

$$E(D) = \frac{9Q'(D)Q''(D)}{3P'(D)Q''(D) + P''(D)Q'(D)} \tag{14}$$

$$\mu(D) = \frac{3P'(D)Q''(D) - 2P''(D)Q''(D)}{2[3P'(D)Q''(D) + P''(D)Q'(D)]} \tag{15}$$

可得 Burgers 体在三维空间所对应的算子函数的拉普拉斯变换形式为

$$P'(s) = 1 + \left(\frac{\eta_2}{G_0} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{G_1}\right)s + \frac{\eta_1\eta_2}{G_0G_1}s^2 \tag{16}$$

$$Q'(s) = \eta_2 s + \frac{\eta_1\eta_2}{G_1}s^2 \tag{17}$$

式中,s 为拉氏空间的自变量;G_0、G_1 分别对应于 E_0、E_1 的剪切粘弹性模量,Pa。

经过拉普拉斯变换后可得 E 和 μ 与算子函数之间的关系为

$$E(s) = \frac{9Q'(s)Q''(s)}{3P'(s)Q''(s) + P''(s)Q'(s)} \tag{18}$$

$$\mu(s) = \frac{3P'(s)Q''(s) - 2P''(s)Q''(s)}{2[3P'(s)Q''(s) + P''(s)Q'(s)]} \tag{19}$$

$Q''(s)$、$P''(s)$ 是反映材料粘弹性体积变形的算子[2],若材料体积变形呈弹性,由式(13)可知:

$$Q''(s) = K, P''(s) = 1 \tag{20}$$

2　采空区顶板流变特性研究

由于采空区顶板变形满足薄板小挠度弯曲变形理论,因此,粘弹性问题与弹性问题只是本构关系不同,其平衡微分方程、几何关系以及边界条件完全相同。研究表明:线粘弹性边值问题的求解方程在拉普拉斯空间的变化形式与线弹性问题是完全相同的,这种关系称为弹性粘弹性相应原理[9]。因此,对于已获得边界条件弹性问题的解,只需将弹性解进行拉普拉斯变换后的表达式中的材料参数式进行替换,并作拉普拉斯逆变换获得同一粘弹性解[10]。

本文分别考虑首采工作面初次来压和周期来压的力学模型,将初次来压构建成四边固定模型,周期来压构建成三边固定一边自由的模型,并对其分别进行研究。

2.1　四边固定矩形薄板流变研究

2.1.1　四边固定薄板挠曲微分方程及边界条件

将采空区顶板简化为弹性矩形薄板,矩形薄板长度为 $2a$,宽度为 $2b(a \geqslant b)$,厚度为 h ,上层覆岩对顶板的压力理想化为均布荷载,建立如图 2 所示模型。

弹性薄板的挠曲微分方程为

$$D\nabla^4 w(x,y) = q \tag{21}$$

式中,D 为薄板的抗弯刚度, Pa · m^3,$D = Eh^3/12(1-\mu^2)$; h 为采空区顶板的厚度, m ; μ 为泊松比; E 为薄板的弹性模量, Pa ; $\nabla^4 w = \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4}$。

四边固定薄板的边界情况: $x = \pm a, y = \pm b$ 为固定边,其边界条件为

$$\begin{aligned} w\big|_{x=\pm a} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = 0 \\ w\big|_{y=\pm b} = 0, \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\pm b} = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

本文选择以伽辽金法来求解四边固定矩形顶板中心挠度表达式。

2.1.2　初次来压顶板挠度解析解方程

设定挠曲函数为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_n = \sum_{m=1}^{\infty} C_m (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \tag{23}$$

式中, C_m 为相互独立的第 m 个待定系数; w_n 为满足边界条件的设定函数。

$$\begin{aligned} \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ 8[3(y^2 - b^2)^2 + 3(x^2 - a^2)^2 + \\ 4(3x^2 - a^2)(3y^2 - b^2)] C_n \end{aligned} \tag{24}$$

很显然挠度函数 $w(x,y)$ 均满足式(21)的边界条件,将式(24)代入伽辽金方程中

$$\iint_A D(\nabla^4 w) w_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint q w_m \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{25}$$

积分后得

$$C_m = \frac{7q}{128D\left(a^4 + b^4 + \dfrac{4}{7}a^2 b^2\right)} \tag{26}$$

将式(26)代入挠度表达式中,则有

$$w(x,y) = \sum_m \frac{7q}{128D\left(a^4 + b^4 + \dfrac{4}{7}a^2 b^2\right)} (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \tag{27}$$

由式(27)可知,粘弹性理论得到薄板弯曲挠度变形曲线的表达式为

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{21[1-\mu(s)] \cdot q(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{32E(s)h^3\left(a^4 + \dfrac{4}{7}a^2 b^2 + b^4\right)} \tag{28}$$

对弹性解式(28)进行拉普拉斯变换得

$$w(x,y,s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{21[1-\mu(s)] \cdot q(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2}{s\left\{32E(s)h^3\left(a^4 + \dfrac{4}{7}a^2 b^2 + b^4\right)\right\}} \tag{29}$$

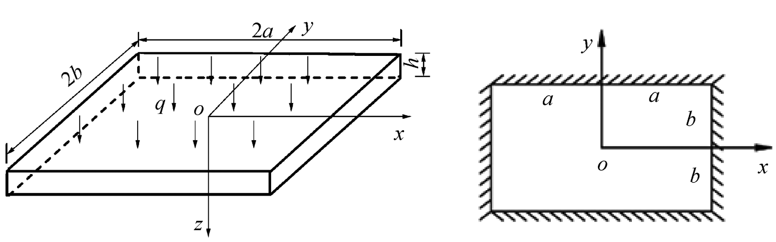

图 2　四边固定顶板模型示意图

Fig. 2　Schematic diagram of roof model with four sides fixed

将公式(18)(19)(20)带入式(29)中,得：

$$w(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{18}\cdot\frac{1}{K}+\frac{3\left[1+\left(\frac{\eta_2}{G_0}+\frac{\eta_1+\eta_2}{G_1}\right)s+\frac{\eta_1\eta_2}{G_0G_1}s^2\right]}{18\left(\eta_2 s+\frac{\eta_1\eta_2}{G_1}s^2\right)}\right\}\cdot\frac{21q(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2}{32h^3\left(a^4+\frac{4}{7}a^2b^2+b^4\right)} \tag{30}$$

将公式(30)进行拉普拉斯逆变换,得到粘弹性薄板弯曲的挠度函数表达式为

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{18}t+\frac{1}{6\eta_2}\ln\frac{t}{t+\frac{G_1}{\eta_1}}+\frac{1}{6}\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1\eta_2}+\frac{t}{G_0}\right)\ln\left(\eta_2+\frac{\eta_1\eta_2}{G_1}t\right)\right\}\cdot 21q(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2/32h^3\left(a^4+\frac{4}{7}a^2b^2+b^4\right) \tag{31}$$

2.2　三边固定一边自由矩形薄板流变研究

利用单三角级数构造三边固定一边自由矩形薄板在均布荷载作用下的挠曲变形函数,并依据最小势能原理求解挠曲变形函数系数[11],最后再根据薄板小挠度弯曲理论得到三边固定一边自由矩形薄板的应力与内力函数,利用拉普拉斯变换得到弹性薄板流变函数,并结合具体工程案例分析。

2.2.1　三边固定一边自由薄板挠曲微分方程及边界条件

三边固定一边自由薄板的边界情况,见图 3：$x=-a$,$y=\pm b$ 为固定边,$x=a$ 为自由边,其边界条件为

$$\begin{aligned}&w\big|_{x=-a}=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=-a}=0\\&w\big|_{y=b}=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=b}=0\\&w\big|_{y=-b}=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{y=-b}=0\end{aligned} \tag{32}$$

直接求解满足矩形薄板边界条件和其弹性挠曲面基本微分方程得到挠度是异常复杂和困难的。因此,本文利用李兹法即同样满足薄板边界条件和其平衡微分方程的最小势能原理求薄板挠度[12]。

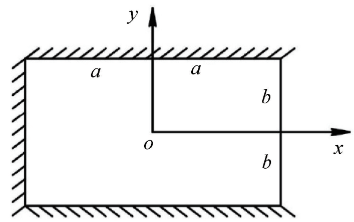

图 3　三边固定一边自由顶板模型示意图

Fig. 3　Schematic diagram of free roof model with fixed three sides and one side

2.2.2　周期来压顶板挠度解析解方程

设定挠曲函数为

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}C_n w_n \tag{33}$$

式中,C_n 为相互独立的第 n 个待定系数；w_n 为满足边界条件的设定函数。

构造设定函数为

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n w_n=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x+a)^2[1+\cos\lambda_n\pi y] \tag{34}$$

其中 $\lambda_n=\frac{(2n-1)}{b}$。

很显然挠度函数 $w(x,y)$ 均满足式(32)的边界条件,根据弹性力学的能量法原理来求解采空区顶板的内力情况。采空区顶板的总势能为

$$\prod=U+W \tag{35}$$

式中,U 为顶板形变势能的增量,J；W 为法向荷载对顶板所做的功,J。

等厚度矩形薄板的形变势能为

$$U=\frac{D}{2}\iint_A\left\{(\nabla^2 w)^2-2(1-\mu)\times\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\cdot\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{36}$$

式中,A 为矩形薄板的面积,m^2；$\nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$。

将挠度函数 $w(x,y)$ 代入公式(36)得

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}DC_n{}^2\left[12ab+2\cdot\lambda_n{}^4a^5b+(1-2\mu)\cdot\frac{32\lambda_n{}^2a^3b}{3}\right] \tag{37}$$

法向荷载的势能为

$$-\iint_A qw_n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_A q\cdot(x+a)^2\left[1+\cos\frac{\lambda_n}{b}\pi y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{32}{3}qa^3b \tag{38}$$

依据最小势能原理则有：

$$\frac{\partial \prod}{\partial C_n} = 0$$

即
$$\frac{\partial(U+W)}{\partial C_n} = 0 \tag{39}$$

将式(37)(38)代入式(39)得

$$2DC_n\left[12ab + 2\lambda_n{}^4a^5b + (1-2\mu)\cdot\frac{32\lambda_n{}^2a^3b}{3}\right] = \frac{32}{3}qa^3b \tag{40}$$

$$C_n = \frac{8qa^2}{D[18 + 3\lambda^4a^4 + 16\cdot(1-2\mu)\lambda_n{}^2a]} \tag{41}$$

将式(41)代入式(34)得

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8qa^3(x+a)^2\cdot(1+\cos\lambda_n y)}{D[18 + 3\lambda_n{}^4a^4 + 16\cdot(1-2\mu)\lambda_n{}^2a]} \tag{42}$$

由式(42)可知，由粘弹性理论得到薄板弯曲挠度变形曲线的表达式为

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12[1-\mu(s)]\cdot[8qa^3(x+a)^2(1+\cos\lambda_n y)]}{E(s)h^3\{18 + 3a^4\lambda_n{}^4 + 16[1-2\mu(s)]a\cdot\lambda_n{}^2\}} \tag{43}$$

对弹性解(43)进行拉普拉斯变换得

$$w(x,y,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12[1-\mu(s)]\cdot[8qa^3(x+a)^2(1+\cos\lambda_n y)]}{s\langle E(s)h^3\{18 + 3a^4\lambda_n{}^4 + 16[1-2\mu(s)]a\cdot\lambda_n{}^2\}\rangle} \tag{44}$$

将公式(18)(19)(20)带入式(44)中得

$$w(x,y,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{18}\cdot\frac{1}{K} + \frac{3\left[1 + \left(\frac{\eta_2}{G_0} + \frac{\eta_1+\eta_2}{G_1}\right)s + \frac{\eta_1\eta_2}{G_0G_1}s^2\right]}{18\left(\eta_2 s + \frac{\eta_1\eta_2}{G_1}s^2\right)}\right\}\cdot\frac{12[8qa^3(x+a)^2(1+\cos\lambda_n y)]}{h^3\{18 + 3a^4\lambda_n{}^4 + 16[1-2\mu(s)]a\cdot\lambda_n{}^2\}} \tag{45}$$

将公式(45)进行拉普拉斯逆变换，得到粘弹性薄板弯曲的挠度函数表达式：

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{18}t + \frac{1}{6\eta_2}\ln\frac{t}{t+\frac{G_1}{\eta_1}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{\eta_1\eta_2} + \frac{t}{G_0}\right)\ln\left(\eta_2 + \frac{\eta_1\eta_2}{G_1}t\right)\right\}\cdot\frac{12[8qa^3(x+a)^2(1+\cos\lambda_n y)]}{h^3\{18 + 3a^4\lambda_n{}^4 + 16[1-2\mu(s)]a\cdot\lambda_n{}^2\}} \tag{46}$$

3　工程案例分析与讨论

现以某矿场开采为例进行研究分析，该矿地表下覆岩主要由黏土及砂质黏土组成，厚度为 150 m，可以近似地将采空区视为矩形区域，工作面长度为 $2a=120$ m，初次来压步距为 $2b=160$ m，周期来压步距为 70 m，关键层厚度为 10 m，矿体厚度为 4 m，底板厚度为 5 m，该工作面物理力学参数具体见表 1 所示。

3.1　四边固定分析

当顶板的四边固定时，挠度最大处位于顶板的中心处($x=0,y=0$)，此时随着时间的变化，挠度值也逐渐变大。当时间足够长，顶板达到极限抗压强度，中心处的挠度达到一定数值而发生坍塌，此时最大挠度值为 37.770 cm，如图 4 所示。

根据工程地质资料和现场勘测，对顶板矿岩取样，采用 RMT-150B 型岩石力学液压伺服控制试验机对试样进行了单轴压缩试验，并分析试样轴向应变与轴向应力的力学响应[13]；采用 WAW-2000 型岩石三轴微机控制电液伺服试验机对试样进行分级加载的流变试验，得到试样瞬时和流变力学特性的试验结果，并分析逐级加载条件下轴向应变与时间的关系[14]，根据试验结果可求得采空区顶板各蠕变参数。采空区顶板弹性模量 E 为 6.454 GPa，剪切模量 G 为 3.479 GPa，泊松比 μ

表 1　矿岩的物理参数

Tab.1　Physical parameters of ore rocks

矿岩名称	容重 /(kN·m^{-3})	抗压强度 /MPa	抗拉强度 /MPa	弹性模量 /GPa	剪切模量 /GPa	泊松比 μ	内摩擦角 /(°)	粘聚力 /MPa
砂土及砂质粘土	18	32.6	1.2	1.85	0.77	0.25	14.0	0.21
顶板	24	43.4	1.5	11.20	5.01	0.22	37.4	1.99
矿体	27	12.9	2.8	7.10	3.64	0.24	42.7	1.67
底板	25	41.7	4.7	12.40	4.88	0.21	44.3	3.52

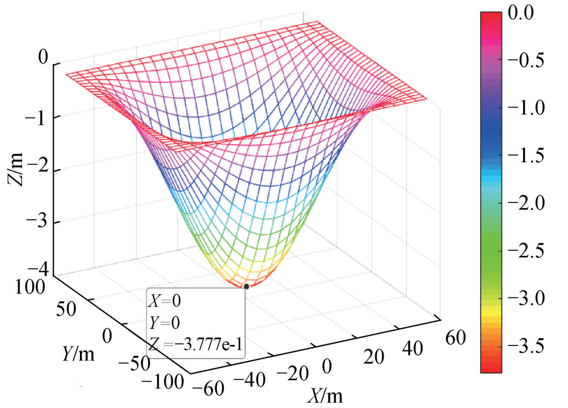

图 4 四边固定顶板第 360 天挠度变化图

Fig. 4 Deflection variation diagram of quadrilateral fixed roof at 360 days

为 0. 157,粘滞系数 η_1 为 1 029 GPa · d ,粘滞系数 η_2 为 105 GPa · d 。

根据推导的公式,利用 MATLAB 语言编程对采空区顶板进行分析,研究采空区顶板的时变演化规律并绘制其挠度-时间图[15],如图 4 和图 5 所示。

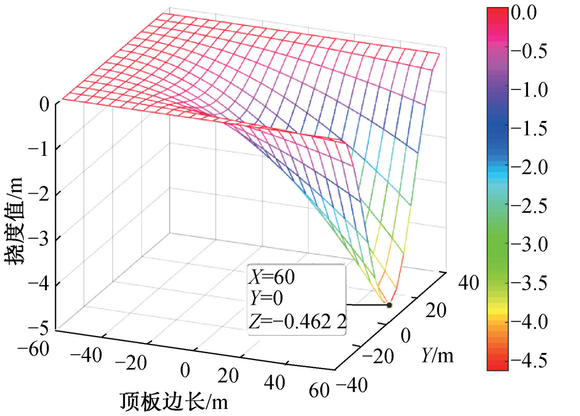

图 5 三边固定一边自由顶板第 720 天挠度变化图

Fig. 5 Deflection change diagram of triangular plate with one fixed side and three free sides at 720 days

顶板四边固定时,将表 1 等物理参数代入公式(31),取时间段为 5~800 d,可得采空区顶板的理论变形值。采空区顶板变形监测方法是在运输巷和回风巷打观测孔,以钻孔底最深测点为基准点,使用 DCC-2 型顶板动态遥测仪来测定其他各测点与孔底点的相对位移,由此得到采空区顶板的变形及移动速度。根据工程监测的实际变形数值,可得顶板变形理论数值与监测位移数据,如图 6 所示。

由图 6 可知:顶板的挠度随时间延长而增大,整体上是呈减速型增大。0 d 时顶板已经产生蠕变,0~5 d 的蠕变速度成正比例增大,5~90 d 顶板的蠕变速度逐渐减缓,自 90 d 后顶板的蠕变速度很缓慢;在 180 d 时顶板的位移特别明显,可判断出现塌落现象;到 360 d 时,顶板的理论变形值和监测数值分别达到了 37. 604、42. 831 cm,变形已经很大,顶板已经断裂、部分垮落;随着时间的推进,顶板在 800 d 时,顶板沉降值过大而发生整体垮落。理论数值和监测数值中,顶板的变形趋势大体一致,两者曲线均具有瞬时弹性变形、减速蠕变、等速蠕变的特点,符合 Burgers 体本构模型。

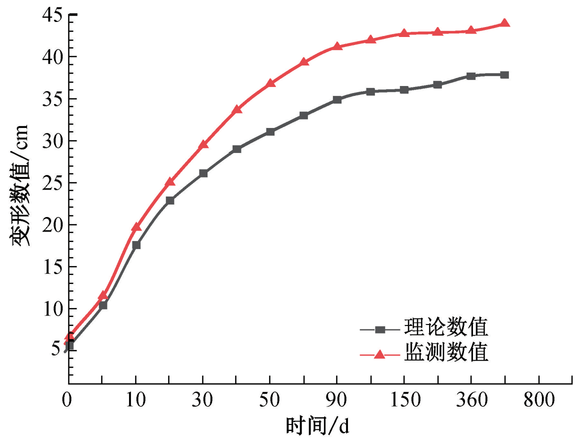

图 6 四边固定顶板变形理论数值与监测数值对比图

Fig. 6 Comparison between theoretical and monitoring values of four-sided fixed roof deformation

3. 2 三边固定一边自由分析

当顶板模型处于三边固定一边自由的约束条件下,此时顶板的自由端处的挠度值变化最为明显,且在自由边的中心处($x=60,y=0$)的挠度值最大。随着时间的变化,顶板达到极限抗压强度,自由边界处的挠度值变化最为明显且在自由边的中心处($x=60,y=0$)的挠度值最大。随着时间的变化,顶板达到极限抗压强度,自由边界处的挠度达到一定数值而发生坍塌,此时最大挠度值为 46. 220 cm,如图 5 所示。

顶板三边固定一边自由时,将表 1 等物理参数代入公式(46),取时间段为 5~720 d,并结合工程测得的实际变形数值,可得顶板变形理论数值与监测位移数据,如图 7 所示。

由图 7 可知:顶板的理论数值与监测数值蠕变趋势大致相同,顶板的挠度随时间延长而增大,整体上呈减速型增大。0~30 d 的蠕变速度较快,自 30 d 后顶板的蠕变速度相比 0~30 d 明显减缓;当达到 150 d 时,顶板蠕变速度很缓慢,顶板出现明

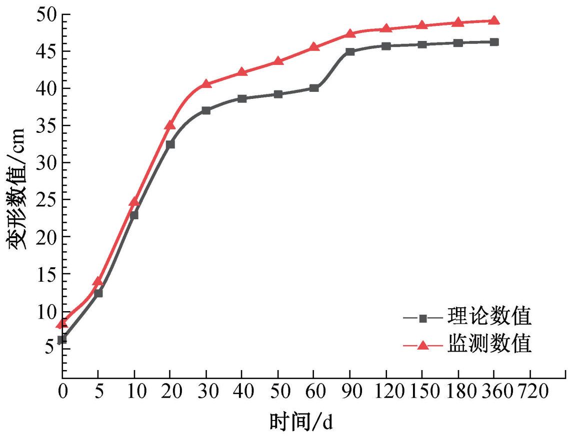

图 7　三边固定一边自由顶板变形理论数值与监测数值对比图

Fig. 7　Comparison of theoretical and monitoring values of free roof deformation with three sides fixed

显的变形和塌落现象;到 360 d 时,顶板的变形值分别达到了 46.079 cm 和 48.777 cm,变形已经很大,顶板已经断裂且部分垮落;随着时间的推进,在 720 d 时蠕变值分别为 46.220 cm 和 49.040 cm,变形过大,发生整体垮落。图 7 所绘曲线均具有瞬时弹性变形、减速蠕变和等速蠕变阶段,符合 Burgers 体蠕变本构模型。

通过三边固定一边自由的顶板与四边固定的顶板蠕变数值对比可知,边界条件约束越多,顶板的稳定性越好,顶板的蠕变速率及数值越小。通过顶板监测数值与理论数值的对比可知,两者的相关性很高,由此证明了采用 Burgers 体本构模型建立的顶板挠度公式用来预测顶板稳定性的可靠性。

4　结论

1)考虑岩体的流变性,推导了采空区顶板挠度随时间变化的理论公式,研究发现采空区顶板经历了瞬时弹性变形、减速蠕变和等速蠕变阶段 3 个阶段,从而揭示了顶板位移随时间演化的非线性特性。

2)通过四边固定顶板与三边固定一边自由顶板挠度随时间变化的对比,我们得出在相同荷载、相同加载时间的情况下,仅仅改变约束条件,边界约束越多,顶板的稳定性越好。

3)顶板监测数值与理论数值两者的相关性很高,由此证明采用 Burgers 体本构模型建立的顶板挠度公式用来预测顶板稳定性的可靠性,同时为工程安全性提供了更多的依据。

参考文献:

[1] 王金安, 李大钟, 马海涛. 采空区矿柱-顶板体系流变力学模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(3): 577-582.

[2] 王金安, 李大钟, 尚新春. 采空区坚硬顶板流变破断力学分析[J]. 北京科技大学学报, 2011, 33(2): 142-148.

[3] 李 铁, 刘诗杰, 马海涛, 等. 采空区顶板流变破断发展及灾变时间[J]. 中国有色金属学报, 2016, 26(3): 666-672.

[4] 刘诗杰, 翟盛锐. 基于 H-K 体的矿柱流变顶板破坏分析[J]. 中国安全生产科学技术, 2015, 11(6): 25-30.

[5] 杨振伟, 金爱兵, 周 喻, 等. 伯格斯模型参数调试与岩石蠕变特性颗粒流分析[J]. 岩土力学, 2015, 36(1): 240-248.

[6] 孙 琦, 魏晓刚, 卫 星, 等. 采空区矿柱流变特性对露天矿边坡稳定性的影响研究[J]. 中国安全科学学报, 2014(8): 85-91.

[7] 王金安, 赵志宏, 侯志鹰. 浅埋坚硬覆岩下开采地表塌陷机理研究[J]. 煤炭学报, 2007(10): 1051-1056.

[8] 王玉亮. 采空区顶板简易流变分析[J]. 化工矿山技术, 1986(6): 10-12+48.

[9] 韩科明. 荷载作用下采空区覆岩稳定性评价理论研究[D]. 北京:煤炭科学研究总院, 2020.

[10] 彭 凡, 陈耀军, 刘一凡, 等. 基于 Fourier 级数展开的 Laplace 数值逆变换[J]. 力学学报, 2008(2): 215-221.

[11] 高 俊, 党发宁, 李海斌, 等. 静水荷载作用下矩形薄板力学特性研究及其应用[J]. 应用力学学报, 2018, 35(5): 1029-1036+1185.

[12] 程选生, 杜修力. 三边固支一边自由混凝土矩形薄板的热弯曲[J]. 工程力学, 2013, 30(4): 97-106.

[13] YANG Yu, GONG Zhiqiang, LIANG Bing. Dynamic Subsidence basins in coal mines based on rock mass rheological theory[J]. Mining Science and Technology (China), 2011, 21(3): 333-335.

[14] LIAN Xugang, JAROSZ A, ROSAS J S, et al. Extending dynamic models of mining subsidence[J]. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2011, 21: s536-s542.

[15] 杜丽艳, 陈建华. 基于 Matlab 的均布荷载作用下矩形薄板的有限元分析[J]. 重庆工学院学报(自然科学版), 2009, 23(1): 32-35.

(责任编辑　王利君)